

GEOMETRIA



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
ARODO

7

Números complejos

Teoría y Práctica

A
L



7

Números Complejos

Teoría y Práctica

ALGEBRA



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
PRODO

PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2013, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE ÁLGEBRA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

Fondo Editorial RODO

De: Walter Z. Benítez Nuñez.

NÚMEROS COMPLEJOS



ÁLGEBRA - TEMA SELECTO 07, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © Noviembre 2013 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benítez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424-6350 📠 992-796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Nº: 2013 - 18726

EQUIPO PEDAGÓGICO

Juan Carlos Ramos Leyva

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

José Miguel Gallo Ballena

IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ

Impreso en los Talleres Gráficos de **CORPORACIÓN PIANCASH S. A. C.**

Jr. Chancay 446 Of. 112 - Lima 01

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

DEFINICIÓN

Es el conjunto numérico denotado por $\mathbb{C}$ y definido de la manera siguiente:

$$\mathbb{C} = \{(x; y) / x, y \in \mathbb{R}\}$$

Donde se rigen dos operaciones de composición interna: adición (+) y multiplicación (.) más una relación de igualdad (=)

EXPRESIÓN IMAGINARIA

Se denomina así al resultado de extraer signo radical de índice par a números negativos, veamos algunos ejemplos:

$$\bullet \sqrt{-4} \quad \bullet \sqrt{-9} \quad \bullet \sqrt[4]{-2} \quad \bullet \sqrt[6]{-3} \quad \bullet \sqrt[10]{-1}$$

UNIDAD IMAGINARIA (i)

Convencionalmente se denomina así al resultado de extraer raíz cuadrada al número -1

$$i = \sqrt{-1} / i^2 = -1$$

Ahora con algunos ejemplos dados anteriormente tenemos:

$$\bullet \sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot -1} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$$

$$\bullet \sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot -1} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$$

POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

Considerando exponentes enteros, en particular naturales, cada potencia de la unidad imaginaria se repetirá periódicamente cada cuatro resultados, veamos una tabla:

$i^1 = i$	$i^2 = -1$
$i^3 = -i$	$i^4 = 1$

$$\bullet i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$\bullet i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$$

$$\bullet i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$\bullet i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot -1 = -1$$

$$\bullet i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$\bullet i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\bullet i^9 = i^8 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

TEOREMAS

1) $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$$

$$\bullet \quad i^3 + i^4 + i^5 + i^6 = 0$$

2) $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$i^{4k} = 1$$

$$\bullet \quad i^{24} = i^{4k} = 1$$

3) $\forall k \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{Q}$

$$i^{4k+m} = i^m$$

$$\bullet \quad i^{46} = i^{44+2} = i^{4k+2} = i^2 = -1$$

PROPIEDADES

1) $\frac{1+i}{1-i} = i \quad \wedge \quad \frac{1-i}{1+i} = -i$

2) $(1+i)^2 = 2i \quad \wedge \quad (1-i)^2 = -2i$

NÚMERO COMPLEJO

Es un par ordenado de componentes reales que consensuadamente se denota por z

$$z = (x; y) / x, y \in \mathbb{R}$$

Donde: $x = \text{parte real del complejo} \quad z = \text{Re}(z)$
 $y = \text{parte imaginaria del complejo} \quad z = \text{Im}(z)$

$$\bullet \quad Z = (2; -5) \begin{cases} \nearrow \text{Re}(Z) = 2 \\ \searrow \text{Im}(Z) = -5 \end{cases}$$

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Dado el complejo $Z = (x; y) / x, y \in \mathbb{R}$:

- I. Si: $y = 0$, entonces Z es un complejo real.
- II. Si: $x = 0 \wedge y \neq 0$, entonces Z es un número imaginario puro.
- III. Si: $x = 0 \wedge y = 0$, entonces Z es un complejo nulo.
- IV. Si: $x \neq 0 \wedge y \neq 0$, entonces Z es un número imaginario

FORMA RECTANGULAR, CARTESIANA O BINÓMICA DE UN NÚMERO COMPLEJO Z

$$z = (x; y) = x + yi / x, y \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$$

$$\bullet \quad Z = 8 - 3i \begin{cases} \text{Re}(Z) = 8 \\ \text{Im}(Z) = -3 \end{cases}$$

$$\bullet \quad Z = -2 + i \begin{cases} \text{Re}(Z) = -2 \\ \text{Im}(Z) = 1 \end{cases}$$

NÚMEROS COMPLEJOS ESPECIALES

Dado el complejo $Z = x + yi / x \wedge y \in \mathbb{R}$, se define:

I. Conjugado de Z ($\bar{Z}$)

$$\bar{Z} = x - yi$$

$$\bullet \quad Z = 5 - 2i \begin{cases} \bar{Z} = 5 + 2i \\ Z_{op} = -5 + 2i \end{cases}$$

II. Opuesto de Z ($Z_{op} = Z^*$)

$$Z^* = -Z = -x - yi$$

$$\bullet \quad Z = 3i \begin{cases} \bar{Z} = -3i \\ Z_{op} = -3i \end{cases}$$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Dados los complejos: $Z_1 = x + yi \wedge Z_2 = a + bi$, tenemos:

I. ADICIÓN:

$$Z_1 \in \mathbb{C} \wedge Z_2 \in \mathbb{C} \rightarrow (Z_1 + Z_2) \in \mathbb{C}$$

$$Z_1 + Z_2 = x + yi + a + bi$$

$$\therefore Z_1 + Z_2 = (x + a) + (y + b)i$$

II. MULTIPLICACIÓN:

$$Z_1 \in \mathbb{C} \wedge Z_2 \in \mathbb{C} \rightarrow (Z_1 \cdot Z_2) \in \mathbb{C}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x + yi) \cdot (a + bi)$$

$$\therefore Z_1 \cdot Z_2 = (ax - by) + (bx + ay)i$$

Ejemplo: Si $Z_1 = 4 + 3i \wedge Z_2 = 2 + i$
Encontrar $Z_1 + Z_2 \wedge Z_1 \cdot Z_2$

Resolución: I. $Z_1 + Z_2 = 4 + 3i + 2 + i$

$$\therefore Z_1 + Z_2 = 6 + 4i$$

También para $Z_1 - Z_2$ tenemos:

$$Z_1 - Z_2 = 4 + 3i - (2 + i)$$

$$Z_1 - Z_2 = 4 + 3i - 2 - i$$

$$\therefore Z_1 - Z_2 = 2 + 2i$$

$$\text{II. } Z_1 \cdot Z_2 = (4 + 3i)(2 + i)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = 8 + 4i + 6i - 3$$

$$\therefore Z_1 \cdot Z_2 = 5 + 10i$$

OBSERVACIÓN

Para efectuar una división entre números complejos donde el denominador es imaginario, se debe multiplicar a cada término por el conjugado del denominador, veamos un ejemplo:

Sea:

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} \rightarrow Z = \frac{4 + 3i}{2 + i}; i = \sqrt{-1}$$

$$Z = \frac{(4 + 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{8 - 4i + 6i + 3}{(2)^2 - i^2}$$

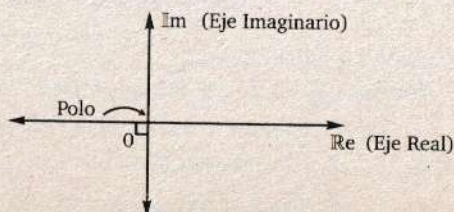
$$Z = \frac{11 + 2i}{5} \quad \therefore Z = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i$$

Teoremas: $\forall Z, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$

- 1) $\overline{(\overline{Z})} = Z$
- 2) $\overline{(Z_1 + Z_2)} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$
- 3) $\overline{(Z_1 - Z_2)} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$
- 4) $\overline{(Z_1 \cdot Z_2)} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$
- 5) $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}; Z_2 \neq 0$

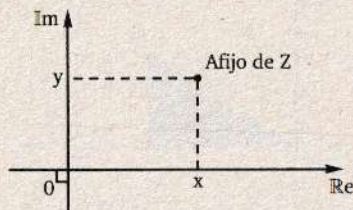
PLANO COMPLEJO

También llamado plano de Gauss o Diagrama de Argan'd.



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN NÚMERO COMPLEJO Z

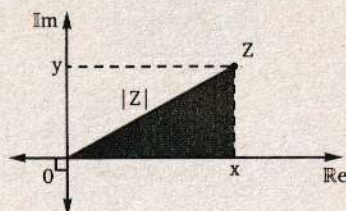
Dado el complejo $Z = x + yi$ / $x \wedge y \in \mathbb{R}$ su representación gráfica en el plano complejo será un punto al cual llamaremos afijo, veamos:



MÓDULO O VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO COMPLEJO Z

Es la distancia que existe desde el polo hasta el afijo de Z, veamos:

$$Z = x + yi \text{ / } x \wedge y \in \mathbb{R}$$



En el triángulo sombreada podemos aplicar el teorema de Pitágoras: $|Z|^2 = x^2 + y^2$

$$\therefore |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\bullet \quad Z = \sqrt{3} + i \rightarrow |Z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2}$$

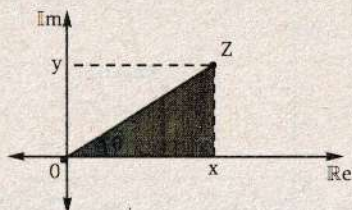
$$|Z| = \sqrt{4} \quad \therefore |Z| = 2$$

PROPIEDADES $\forall Z, Z_1 \wedge Z_2 \in \mathbb{C} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

- | | |
|--|--|
| 1) $ Z \geq 0$ | 6) $ \sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{ Z }$ |
| 2) $ Z = \bar{Z} = Z_{op} $ | 7) $ Z ^2 = Z \cdot \bar{Z}$ |
| 3) $ Z_1 \cdot Z_2 = Z_1 \cdot Z_2 $ | 8) $ Z_1 + Z_2 \leq Z_1 + Z_2 $ |
| 4) $\left \frac{Z_1}{Z_2} \right = \frac{ Z_1 }{ Z_2 }$; $Z_2 \neq 0$ | 9) $ Z_1 + Z_2 \geq Z_1 - Z_2 $ |
| 5) $ Z^n = Z ^n$ | 10) $ Z_1 - Z_2 \leq Z_1 - Z_2 $ |

ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO Z

Es la dirección del segmento de recta que contiene al módulo de Z medido en sentido antihorario y denotado por $\text{Arg}(Z)$



La forma general del argumento de Z es:

$$\text{Arg}(Z) = 2k\pi + \theta ; k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Si $k = 0$ entonces $\text{Arg}(Z) = \theta$, al cual se le da el nombre de argumento principal de Z y debe verificar lo siguiente:

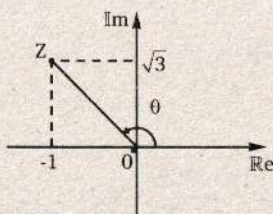
$$0 \leq \theta < 2\pi$$

Del triángulo sombreada tenemos:

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \therefore \theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ejemplo: ¿Cuál es el argumento principal de Z, donde $Z = -1 + \sqrt{3}i$?

Resolución: Ubicamos a Z en el plano complejo:



θ = ángulo del segundo cuadrante

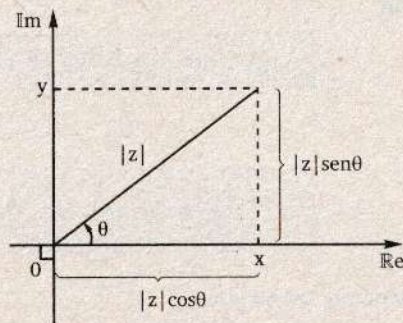
$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

**OBSERVACIÓN**

El argumento de un número complejo se puede expresar en radianes o en grados sexagesimales.

FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dado el complejo $z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}$



De la gráfica tenemos: $x = |z| \cos \theta$; $y = |z| \sin \theta$

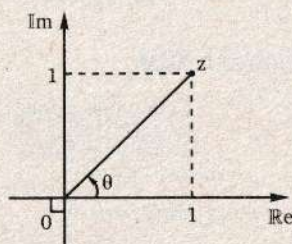
Ahora el complejo será: $z = |z| \cos \theta + |z| \sin \theta i$

Cuya forma polar es: $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$

Siendo su forma abreviada: $z = |z| \operatorname{cis} \theta$

Ejemplo: Expresar en forma polar al siguiente complejo $z = 1 + i$

Resolución: Ubicando a z en el plano complejo



θ se ubica en el primer cuadrante:

$$\tan \theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Observar que: $|z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$$\therefore z = |z| \operatorname{cis} \theta = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

OPERACIONES EN FORMA POLAR

Dado los complejos $z_1 = |z_1| \operatorname{cis} \theta_1$; $z_2 = |z_2| \operatorname{cis} \theta_2$; $z = |z| \operatorname{cis} \theta$ y el número natural "n"

1. MULTIPLICACIÓN

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

2. DIVISIÓN

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2) ; z_2 \neq 0$$

3. POTENCIA (Fórmula de De Moivre)

$$z^n = (|z| \operatorname{cis} \theta)^n = |z|^n \cdot \operatorname{cis}(n\theta)$$

Esta relación también se verifica cuando n es un entero negativo, siendo $z \neq 0$.

4. RADICACIÓN

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z| \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{|z|} \operatorname{cis} \left(\frac{2k\pi + \theta}{n} \right)$$

Donde $k = 0; 1; 2; 3; \dots; (n-1)$

RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD REAL

Consideremos al complejo: $z = 1 = 1 + 0i$, observar que $|z| = 1$

Cuya forma polar es: $z = \cos(0^\circ) + \operatorname{sen}(0^\circ)$
 $z = |z| \operatorname{cis}(0^\circ) = \operatorname{cis}(0^\circ)$

Extrayendo raíz cúbica: $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\operatorname{cis}(0^\circ)} = \operatorname{cis} \left(\frac{2k\pi + 0}{3} \right)$
 $\sqrt[3]{z} = \operatorname{cis} \left(\frac{2k\pi}{3} \right)$

Si $k = 0$, tenemos: $\sqrt[3]{z} = \operatorname{cis}(0^\circ) = \cos(0^\circ) + i \operatorname{sen}(0^\circ)$
 $\sqrt[3]{z} = 1$

NÚMEROS COMPLEJOS

Si $k = 1$, tenemos :

$$\sqrt[3]{z} = \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[3]{z} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Si $k = 2$, tenemos :

$$\sqrt[3]{z} = \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[3]{z} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Consensuadamente cuando $k = 1$, $\sqrt[3]{z} = w$ y cuando $k = 2$, $\sqrt[3]{z} = w^2$

En resumen :

$$\sqrt[3]{1} \begin{cases} \rightarrow 1 \\ \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = w \\ \rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = w^2 \end{cases}$$

PROPIEDADES

- 1) Las tres raíces cúbicas de la unidad suman cero:

$$1 + w + w^2 = 0$$

- 2) $\forall k \in \mathbb{Z} \mid 3k = \text{Múltiplo de tres}$

$$w^{3k} = 1$$

$$\bullet w^{108} = w^{3 \cdot 36} = w^{3k} = 1$$

- 3) $\forall k \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{Q}$

$$w^{3k+m} = w^m$$

$$\bullet w^{50} = w^{48+2} = w^{3k+2} = w^2$$

FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

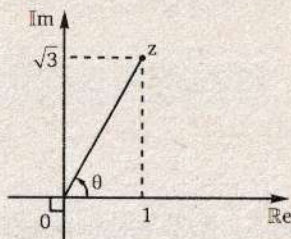
Dado el complejo $z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}$, su forma exponencial se define de la manera siguiente:

$$z = |z| e^{i\theta}$$

Donde θ es el argumento principal de z y e es el número de Napier cuyo valor aproximado es 2,7182

Ejemplo: Representar en forma exponencial al siguiente número complejo $z = 1 + \sqrt{3}i$

Resolución: Ubicando a z en el plano complejo



θ se ubica en el primer cuadrante:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Observar que: $|z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$\therefore z = |z| e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

RELACIÓN ENTRE LA FORMA EXPONENCIAL Y LA FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dado el complejo $z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}$

En forma polar tenemos: $z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$

En forma exponencial tenemos: $z = |z| e^{i\theta}$

Por tratarse del mismo complejo podemos plantear lo siguiente:

$$|z| e^{i\theta} = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

Relación matemática conocida como la **fórmula de Euler**, también:

$$e^{-i\theta} = (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)$$

TEOREMAS ADICIONALES

1) $\forall k \in \mathbb{Z} \quad \operatorname{cis}(\theta_1) = \operatorname{cis}(\theta_2) \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$

2) $\forall k \in \mathbb{Z} \quad e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$

GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1. DEFINICIONES PREVIAS

Dado el complejo: $z = (x; y) = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$

Parte real de $z = \operatorname{Re}(z) = x$

Parte imaginaria de $z = \operatorname{Im}(z) = y$

Módulo de $z = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Argumento de $z = \operatorname{Arg}(z) = \theta$

2. GRÁFICA RELATIVA A LAS PARTES

2.A. La gráfica de $\operatorname{Re}(z) = x$ es una recta vertical.

2.B. La gráfica de $\operatorname{Im}(z) = y$ es una recta horizontal.

2.C. Las gráficas de: $\operatorname{Re}(z) > x; \operatorname{Re}(z) < x; x_1 < \operatorname{Re}(z) < x_2$

$\operatorname{Im}(z) > y; \operatorname{Im}(z) < y; y_1 < \operatorname{Im}(z) < y_2$

son semiplanos.

3. GRÁFICA RELATIVO AL ARGUMENTO

3.A. El gráfico $\operatorname{Arg}(z) = \theta$ es el conjunto de números complejos que tienen por argumento θ .

3.B. El gráfico de $\theta_1 < \operatorname{Arg}(z) < \theta_2$ es un semiplano comprendido entre los argumentos θ_1 y θ_2 cuyo vértice del ángulo es el origen de coordenadas.

3.C. El gráfico de $\theta_1 < \operatorname{Arg}(z - z_0) < \theta_2$ es similar al caso anterior con vértice en z_0 .

4. GRÁFICA RELATIVA AL MÓDULO

4.A. La gráfica de: $|z - z_0| = r$, es una circunferencia de centro en z_0 y radio r .

4.B. La gráfica de: $|z - z_0| < r$, es un círculo que no incluye a la circunferencia.

4.C. La gráfica de: $|z - z_0| > r$, es el semiplano fuera de la circunferencia; no incluye a la circunferencia.

4.D. La gráfica de: $r_1 < |z - z_0| < r_2$, es una corona circular.



NOTA

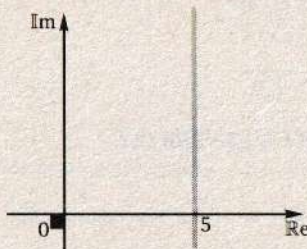
Si en cualquier caso citado anteriormente se sustituye un signo de relación simple por su correspondiente signo doble ($>$ por $\geq$ o $<$ por $\leq$) se deberá incluir como solución la frontera que origina la línea.

Ejemplo 1: Graficar el conjunto:

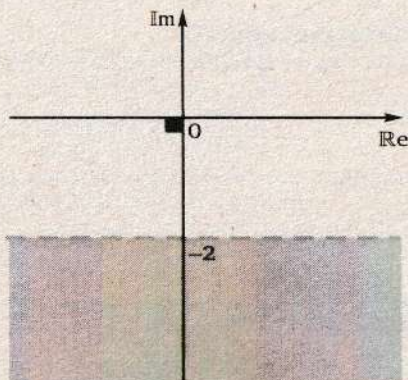
$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 5\}$$

Resolución:Sea el número complejo: $z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$ Por condición tenemos: $x = 5$

La cual nos indica una recta vertical, en el plano complejo:

 $x=5$ es el lugar geométrico de todos los $z = x + yi$ tal que $\operatorname{Re}(z) = 5$ **Ejemplo 2:** Graficar el conjunto:

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) < -2\}$$

Resolución:Sea el número complejo: $z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$ Por condición tenemos: $y < -2$ La desigualdad corresponde a un semiplano ubicado por debajo de la recta $y = -2$, sin incluir a esta.El semiplano sombreado es el lugar geométrico de todos los $z = x + yi$ tal que $\operatorname{Im}(z) < -2$

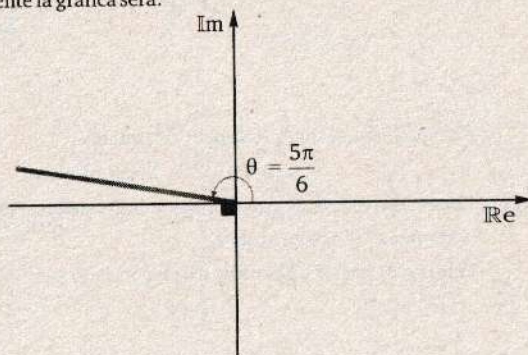
Ejemplo 3: Graficar el conjunto:

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z) = \frac{5\pi}{6} \right\}$$

Resolución: Sea el número complejo: $z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$

Por condición tenemos: $\operatorname{Arg}(z) = \frac{5\pi}{6}$

Finalmente la gráfica será:



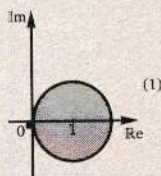
Ejemplo 4: Graficar:

$$S = \{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \}$$

Resolución: Por condición tenemos:

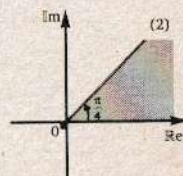
$$|z - 1| \leq 1 \Leftrightarrow |z - (1 + 0i)| \leq 1$$

Cuya gráfica es el círculo que incluye a la circunferencia de centro $(1; 0)$ y radio 1, veamos:

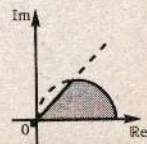


Para el argumento tenemos:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

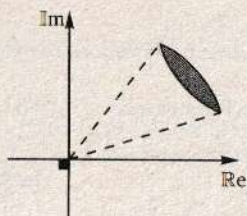


Finalmente la gráfica de S viene dada por la intersección de (1) y (2) veamos:



Ejemplo 5:

A continuación se muestra la gráfica de todos los complejos $z/z = x + yi$, luego la gráfica de $\bar{z}$ será:

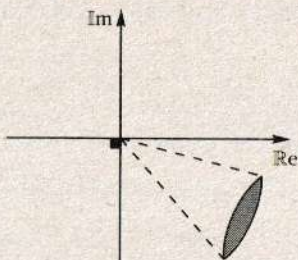
**Resolución:**

En el problema se da "z" y se pide " $\bar{z}$ ", como:

$$z = x + yi \rightarrow \bar{z} = x - yi$$

Como z pertenece al primer cuadrante, se deduce que: $x > 0 \wedge y > 0$; luego $\bar{z}$ pertenece al cuarto cuadrante.

Finalmente la gráfica de todos los $\bar{z}$ viene dado por:

**OBSERVACIONES**

- I. Las gráficas de $z \wedge \bar{z}$ son simétricas con respecto al eje Real.
- II. Las gráficas de $z \wedge zop$ son simétricas con respecto al polo.



PROBLEMA RESUELTO

1. Dados los complejos:

$$z_1 = 3 + 5i$$

$$z_2 = -5 + i$$

$$z_3 = 1 - i$$

Hallar:

$$\frac{z_1 + 2z_2}{i z_3}$$

- A) 2i B) 5i C) 4i
D) 7i E) -2i

2. Indicar el valor de verdad:

I. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$; $z \in \mathbb{C}$

II. $z - \bar{z} = \operatorname{Im}(z)$; $z \in \mathbb{C}$

III. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

IV. $z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ es un complejo real

- A) VFVV B) VVVV C) VFVF
D) FFFF E) FVVF

3. Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que: $(z + \bar{z})^3 + \operatorname{Re}(z) = 0$

Calcular: $\operatorname{Re}(z)$

- A) -5 B) -3 C) 2
D) 1 E) 0

4. Dado $a \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$, simplificar

$$\left| \frac{100 - ai}{a - 100i} \right| + \left| \frac{\sqrt{3} - ai}{\sqrt{3}i - a} \right|$$

donde " $|\cdot|$ " denota módulo de un complejo.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

5. Si: $a + bi = \sqrt{7 + 24i}$.

Calcular: $a^2 + b^2$.

- A) 20 B) 25 C) 30
D) 27 E) 32

6. Simplificar:

$$R = \frac{5 - 5i}{1 - \frac{1+i}{1-i}}$$

- A) 2 B) 7 C) 20
D) 5 E) 24

7. Reducir:

$$\sqrt{2\sqrt{i} - \sqrt{2i}}; i = \sqrt{-1}$$

- A) $1 + i$ B) $2 + i$ C) $3 + i$
D) $4 + i$ E) $1 - i$

8. Halle el módulo del complejo " z^n ", si:

$$z = \left[\frac{7i^3 + 5i^5 + 3i^7}{3i^{-3} + 5i^{-5} + 7i^{-7}} \right]^{4^{321}} + 2i^{2^{34}}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

9. Sea: $z = 1 + i$, $w = 1 - i$. Calcular:

$$\left(\frac{z}{w} \right)^{100}$$

- A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

10. Efectuar:

$$\frac{1+i}{1-i} - \left(\frac{1-i}{1+i} \right) - \sqrt{-4}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 0

11. Sea el número complejo "z", tal que:

$$z = \frac{(1+i)^2 + (1-i)^3}{(1-i)^2 + (1+i)^3}$$

Halle el valor de:

$$\frac{\operatorname{Re}(z) + 1}{\operatorname{Im}(z) - 1}$$

- A) 4 B) -3 C) 3
D) -2 E) 1

12. Calcule el valor de:
- $3 \cdot i^{27} + 4 \cdot i^{37} - i^{30}$

- A) $1+i$ B) i C) $3i$
D) $5i$ E) $-2i$

13. Si:
- $E = \frac{(\sqrt{3} + i)^n}{(1-i)^{n-3}}$
- ;
- $n \in \mathbb{N}$

Calcule "n", si: $|E| = 32$ ($| \cdot |$: módulo)

- A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 10

14. Sea:
- $z = (1+i)^{10}$
- . Halle:
- $\operatorname{Im}(z)$

- A) 32 B) 10 C) 64
D) 128 E) 256

15. Efectuar:
- $A = \frac{(1+i)^2(3-5i)}{3i+5}$
- ;
- $i^2 = -1$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

16. Sea:
- $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- , hallar:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{z_2}{z_1+z_2}\right)$$

- A) -2 B) 2 C) -1
D) 0 E) 1

17. Dado:
- $\frac{z+1}{z-1} = m i$
- /
- $m \in \mathbb{R}$
- ;
- $z \in \mathbb{C}$

Determine: $|z|$

- A) 5 B) 3 C) -3
D) 1 E) 2

18. Si:
- $z = 3 + 2i$

Hallar: $M = |z + \bar{z} + \bar{z}^*| + 2\sqrt{13}$

- A) $2\sqrt{13}$ B) $3\sqrt{13}$ C) $5\sqrt{13}$
D) $\sqrt{15}$ E) 0

19. Si:
- $z, w \in \mathbb{C}$
- ;
- $|z| = |w|$
- y

$$\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(w) = 0$$

Calcular: $|1+z|^2 - |1+w|^2$

- A) -2 B) -1 C) 2
D) 1 E) 0

20. Si se cumple que:

$$x + yi = (3+i)(2+i)$$

Calcular: $x^5 - y^5$; si: $i = \sqrt{-1}$

- A) 2 B) 3 C) 1
D) 0 E) -1

21. Calcular el módulo del complejo:

$$W = \sum_{n=2}^{15} \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(2n-1)(2n+1)}; \quad i = \sqrt{-1}$$

- A) $\frac{56}{93}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{31}{7}$
D) $\frac{34}{3}$ E) $\frac{51}{93}$

22. Dado: $F(x; y) = x + yi$;

Calcular el módulo de:

$$\sum_{k=-5}^5 F(k; -k)$$

- A) $\sqrt{5}$ B) 3 C) 2
D) 1 E) 0

23. Si: $\sqrt{a+bi} = m+ni$; $a, b, m, n \in \mathbb{R} - \{0\}$

Calcular:

$$\frac{2(a^2 + b^2)}{(m^2 + n^2)^2}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

24. Sea el complejo:

$$z = (\operatorname{sen} \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{sen} 2\alpha + i \operatorname{sen} 2\alpha) \dots$$

$$(\operatorname{sen} n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha);$$

$$n\alpha \in \text{I Cuadrante para } n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{Además: } |z| = a^a + bi$$

$$\text{Calcular: } a^3 + b^3, \text{ siendo } a, b \in \mathbb{R}$$

- A) 29 B) 13 C) 8
D) 2 E) 1

25. Calcule n si: $[(1+i)^7 + (i-i)^7]^n = 4096$

- A) 8 B) 4 C) 1
D) 2 E) 3

26. Calcule n si:

$$\left[(1+i)^{\frac{1}{5}} + 2(-2+2i)^{\frac{1}{3n}} + 3(-4)^{\frac{1}{4n}} \right]^{n^2} = -6^{16} \cdot 4$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

27. Determine $2a - b$, si se cumple:

$$a + bi = [(2-3i)^i + 1]^{1-i^{33}}$$

- A) 0 B) -3 C) 4
D) 3 E) 2

28. Si: $z = 1 + i$, calcule el valor de:

$$\left(\frac{1}{z} \right)^{\left(\frac{1}{z} \right)^4}$$

- A) -1 B) -2 C) -4
D) -8 E) -12

29. Si: $z = \frac{1+4n^2 i}{8n^2 - i}$; $n \in \mathbb{R}$

$$\text{Calcule: } \left| z - \frac{3}{4}i \right|$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{16}$
D) $\frac{1}{64}$ E) $\frac{1}{128}$

30. Si se cumple:

$$\frac{1+ai}{a+i} + \frac{a+3i}{1-ai} = ki; k, a \in \mathbb{R}$$

$$\text{Calcule: } k^4 + 1$$

- A) 15 B) 16 C) 17
D) 19 E) 20

31. Se tiene la siguiente función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{definida por: } f(a+bi) = f(b) + if(a),$$

$$\text{halle: } \sum_{k=1}^{2002} f(k+i)$$

- A) 2002 B) 2001
C) 0
D) 1 E) $2002 + 200i$

32. Un número complejo más su inverso es igual al conjugado de dicho número. El número complejo es:

A) $1 + i$ B) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
 D) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ E) $\pm \frac{i}{\sqrt{2}}$

33. Si "w" es un número complejo que verifica la condición: $\sqrt{3} + (1 + 2w)i = 0$, entonces w^{10} es:

A) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B) $-1 + \sqrt{3}i$
 C) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 D) $1 + i$ E) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

34. Determinar el coseno del ángulo que forman los radios vectores de los complejos: $z_1 = 3 + 6i$ y $z_2 = 6 + 3i$.

A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ C) 4
 D) $\frac{4}{5}$ E) 0

35. Si z es un número complejo que verifica las condiciones:

I. $\operatorname{Re}(\sqrt{z}) + 2\operatorname{Im}(\sqrt{z}) = 18$

II. $\operatorname{Arg}(z^2) = \pi$

Entonces el complejo z es:

A) $6 + 6i$ B) $6\sqrt{2}i$ C) $-6 - 6i$
 D) $-6\sqrt{2}i$ E) $72i$

36. Sea P un polinomio complejo cuya fórmula es: $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, entonces podemos afirmar que "P" puede tener:

- I. Una raíz imaginaria y dos reales.
 II. Dos raíces imaginarias diferentes (sin ser conjugadas) y una raíz real.
 III. Tres raíces imaginarias.

A) FFF B) FVV C) FVF
 D) VVV E) VVF

37. Simplificar:

$$\frac{(a + bi)^4 + 12a^2b^2 + (a - bi)^4}{a^4 + b^4}$$

A) 0 B) 1 C) 2
 D) 3 E) 4

38. Simplificar: $\frac{(1+i)^3 + (1-i)^3}{(1+i)^3 - (1-i)^3}$

A) 1 B) -1 C) i
 D) -i E) $1 + i$

39. Reducir: $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + \sqrt{2}i} - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - \sqrt{2}i}$

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{5}i$ C) $\frac{2}{5}$
 D) $\frac{2}{5}i$ E) $\frac{7}{3}$

40. Calcular $\frac{a}{b}$, si se cumple que:

$$\frac{1}{a + bi} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = 1 + i$$

A) 2 B) -2 C) 1
 D) -1 E) $\frac{2}{5}$

41. Reducir: $(11 + 2i)^{17} + (1 + 2i)^{57} + 1$

- A) 1 B) 0 C) -1
D) 2 E) 3

42. Calcular $\frac{a^4 - b^4}{2a - b}$, sabiendo que a y b son números reales que satisfacen la igualdad: $\sqrt[3]{4 - 2i} = a + bi$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

43. Simplificar:

$$\frac{\sqrt{a - bi} + \sqrt{a + bi}i}{\sqrt{a + bi} - \sqrt{a - bi}i}$$

- A) a B) ai C) b
D) bi E) i

44. El equivalente de la expresión:

$$\frac{(\cos 17^\circ + i \operatorname{sen} 17^\circ)^3 [\sqrt{2}(\cos 28^\circ + i \operatorname{sen} 28^\circ)]^2}{(\cos 7^\circ + i \operatorname{sen} 7^\circ)^{11}}$$

es:

- A) $\sqrt{3} + i$ B) $1 + \sqrt{3}i$ C) $1 - \sqrt{3}i$
D) $-\sqrt{3} - i$ E) $-\sqrt{3} + i$

45. Calcular $2m - 1$, si el complejo:

$$\frac{m + 3i}{2 - 5i}; m \in \mathbb{R}$$

es imaginario puro.

- A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

46. Calcular el módulo del siguiente número complejo:

$$z = \frac{(1 + 2i)^{12} + 4(1 + 2i)^8 + 4(i - 2)^4}{(2 - i)^8 + 4(2 - i)^4 + 4}$$

- A) 5 B) $5\sqrt{5}$ C) 25
D) $25\sqrt{5}$ E) 1

47. Si z y w son dos números complejos que verifican $|z| = 4 \wedge |w| = 6$.

Calcular el valor de:

$$z \cdot \bar{z} + \bar{w} \cdot w + |\bar{z} \cdot w| + |z \cdot \bar{w}|$$

- A) 10 B) 50 C) 100
D) 24 E) 48

48. Calcular $|z|$, sabiendo que:

$$|z + 16| = 4|z + 1|$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

49. Determinar un equivalente de i^i .

- A) e^π B) $e^{-\pi}$ C) $e^{\frac{\pi}{2}}$
D) $e^{-\frac{\pi}{2}}$ E) $e^{\frac{\pi}{4}}$

50. Determinar el argumento del complejo

$$z, \text{ donde } z = (3 + 4i)^{3-i} \cdot 5^{i-3}$$

- A) $\frac{53\pi}{60}$ B) $\frac{59\pi}{60}$ C) $\frac{47\pi}{60}$
D) $\frac{43\pi}{60}$ E) $\frac{29\pi}{60}$

51. Calcular $\cos(180)$, sabiendo que z es un número complejo que verifica:

$$\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^3 + \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^3 = 1$$

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) -1
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{4}{5}$

52. Expresar en forma exponencial al complejo z , donde:

$$z = \frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

- A) $2e^{i\theta}$ B) $\sqrt{2}e^{i\theta}$ C) $e^{2i\theta}$
D) $e^{i\theta}$ E) $e^{4i\theta}$

53. El equivalente de:

$$\frac{2}{i} \ln \left(\frac{1+i}{1-i} \right) \text{ es:}$$

- A) 1 B) e C) π
D) $\frac{\pi}{e}$ E) $\frac{e}{\pi}$

54. Determinar el menor entero positivo "n" de 4 cifras que verifica la igualdad:

$$\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)^n = -i$$

- A) 1000 B) 1002 C) 1005
D) 1006 E) 1009

55. Reducir:

$$K = i^{1^{2^{3^4}}} + i^{5^{6^{7^8}}} + i^{9^{10^{11^{12}}}} + i^{13^{14^{15^{16}}}}$$

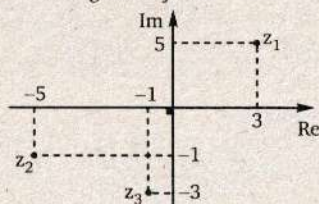
- A) 0 B) $4i$ C) -4
D) 4 E) $-4i$

56. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{-2}$ ()
II. $2012i > 2011i$ ()
III. $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{2}$ ()

- A) VVF B) VVV C) VFV
D) VFF E) FFF

57. Extrayendo la información del diagrama de Argand adjunto:



Determine la parte real del complejo z , donde: $z = z_2 \cdot z_3 - 2z_1$

- A) 4 B) 2 C) -4
D) -2 E) 0

58. Determinar el equivalente de la siguiente expresión:

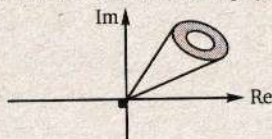
$$\frac{\operatorname{cis}(26^\circ) \cdot \operatorname{cis}(40^\circ)}{\operatorname{cis}(19^\circ) \cdot \operatorname{cis}(10^\circ)}$$

- A) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ B) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ C) $1 + \sqrt{3}i$
D) $\sqrt{3} + i$ E) 1

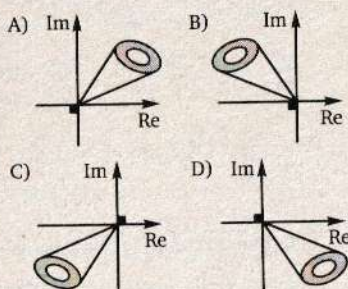
59. Determine el argumento principal del complejo $z = 5^i$

- A) $\ln(2)$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\ln(5)$
D) $-\frac{\pi}{2}$ E) π

60. A continuación se muestra el lugar geométrico de un número complejo z :



Determine el lugar geométrico del complejo $\bar{z}_{op}$



E) Faltan Datos

61. Los números complejos $Z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

U y W; son tales que: $U = \frac{Z}{W}$ y $\arg(U) = \frac{\pi}{6}$.

Calcule $\arg(W)$.

- A) $-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ B) $-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
C) $-\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)$
D) $-\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ E) $-\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)$

62. Determine la cardinalidad del siguiente conjunto: $F = \{z \in \mathbb{C} / z^2 + z = 0\}$.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

63. La parte real de z , la parte imaginaria de z y la parte imaginaria de z^4 son entre si como 1: 2: 3. Hallar el módulo de z .

- A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{24}{25}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
D) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

64. Determine la parte real de z , si:

$$z = 1 - i + i^2 - i^3 + i^4 - i^5 + \dots \text{ (2011 términos)}$$

- A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

65. Determine $|z|$; si $z = 1 + e^{i(2\sqrt{\pi})}$

- A) $\cos\sqrt{\pi}$ B) $2\cos\sqrt{\pi}$ C) $2\cos\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
D) 1 E) $2\cos^4\sqrt{\pi}$

66. Si: $z \in \mathbb{C}$; $2\operatorname{Re}(\sqrt{z}) + 3\operatorname{Im}(\sqrt{z}) = 25$, y $\arg(z^2) = \pi$. Determine el número complejo de z .

- A) 25i B) 30i C) 45i
D) 50i E) 70i

67. Si $z \in \mathbb{C}$, cumple $|z - \sqrt{2}| = \sqrt{2}$ y si los argumentos de z y $(z - \sqrt{2})$ son menores que $\frac{\pi}{2}$, entonces el valor de:

$$E = \frac{\arg(z - \sqrt{2})}{\arg(z)} \text{ es:}$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$
D) 2 E) 4

68. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

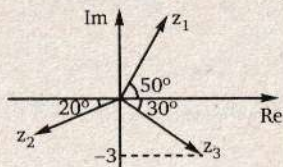
I. $\arg\{(1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n\} = \pi, n \in \mathbb{N}$

II. $\operatorname{Re}(e^{\sqrt{i}}) = e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

III. $\operatorname{Im}(i^i) = e^e$

- A) FFF B) FVV C) FFV
D) VVV E) FVF

69. Sean los números complejos z_1, z_2 y z_3 tal que: $|z_1| = 2|z_2| = 3|z_3|$. Hallar: $z = \frac{z_1 z_2}{z_3}$



- A) $\frac{27}{2}(1+i\sqrt{3})$ B) $\frac{27}{2}(-1+i\sqrt{3})$
C) $\frac{27}{2}(1-i\sqrt{3})$
D) $-\frac{27}{2}(1+i\sqrt{3})$ E) $-\frac{27}{2}(\sqrt{3}+i)$

70. Si: $|z+w| = |z-w|$; determine $\operatorname{Re}(z\bar{w})$.

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 5

71. Indique la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes igualdades:

I. $\arg(e^{i\theta}) = \cos \theta$

II. $\arg(-z + \bar{z}) = \pi \text{ rad}; \forall z / \operatorname{Re}(z) \neq 0$

III. $\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$, donde $x \in \mathbb{R}$

- A) VVV B) VVF C) FVV
D) VFF E) FFF

72. Si se cumple que: $x + yi = (m + ni)^3$, entonces el valor de:

$$\left(1 - \frac{x}{m^3}\right)\left(1 + \frac{y}{n^3}\right) \text{ es:}$$

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

73. Determine el número complejo z que satisface las siguientes condiciones:

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}, \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1 \text{ y } |z| \leq 10$$

- A) $4 + 8i$ B) $6 - 8i$ C) $7 - 7i$
D) $6 + 8i$ E) $1 + i$

74. Determinar el número complejo que se debe sumar al complejo $(1-\sqrt{3}i)^4$ para que el número complejo resultante sea un complejo de módulo 4 y de argumento $\frac{2\pi}{3}$.

- A) $3 + 2\sqrt{i}$ B) $5 - 5i$ C) $6 - 6\sqrt{3}i$
D) $2 + i$ E) $1 + i$

75. Sea el número complejo:

$$z = \frac{i-k}{1+2ki}; k \in \mathbb{R}$$

Determine el módulo de:

$$\left(z - \frac{3}{4}i\right)$$

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$
D) 1 E) $\frac{3}{2}$

76. Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si: $A = 1 + i^3 + i^5 + \dots + i^{91}$ entonces

$$A = 1 + i$$

II. Si: $M = (1 + \sqrt{-1})^{n+2} (1 - \sqrt{-1})^{n-2}$

$$\text{entonces: } M = 4^n$$

III. Si: $S = \frac{1+2i}{2-i} + \frac{3+4i}{4+3i} + \frac{5+6i}{6-5i} + \dots$

(n términos) entonces $S = ni$.

- A) VVV B) VVF C) FVF
D) FFV E) FFF

77. Expresar el cociente en su forma cartesiana.

$$\frac{4(\cos 65^\circ + i \sin 65^\circ)}{3(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)}$$

- A) $\frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}i$ B) $3\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
C) $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i$
D) $\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$ E) $\sqrt{2}(1+i)$

78. Si z_1 y z_2 son dos números complejos definidos por:

$$z_1 = (2; 1) \cdot (1; 0),$$

$$z_2 = (-1; 3) \cdot (1; -2) \cdot (0; 1),$$

entonces el número complejo $\frac{z_1}{z_1 + z_2}$ se encuentra:

- A) sobre el eje real
B) En el primer cuadrante.
C) En el segundo cuadrante.
D) En el cuarto cuadrante.
E) En el eje imaginario.

79. Determine un valor real para a, si se sabe que $\frac{3b + (a+6)i}{3-bi}$, tiene valor imaginario, $b \in \mathbb{R}$.

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

80. $E = \frac{(1+i)^9}{1+i} + \frac{(1-i)^9}{i+i^5} + \frac{(1+i)^8}{1+i^8} + \frac{(1-i)^8}{1-i^{13}}$

- A) $8-32i$ B) $16-32i$ C) $32-8i$
D) $32+8i$ E) $8+32i$

81. Simplifique la expresión compleja:

$$E = \frac{(2+3i)(-1+2i)}{(3-i)} + \frac{(1+i\sqrt{3})^5 i}{2(\sqrt{3}+i)^4}$$

- A) $1-5i$ B) $\frac{1}{2}-5i$ C) $\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$
D) $1-\frac{5}{2}i$ E) $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

82. Halle: $z = 5\bar{z}_1 + 2z_2^2 + z_3 + \frac{5}{4}|z_1||z_2|$,
si: $z_1 = \frac{(1+i)^4 + (1-i)^4}{2+i}$; $z_2 = \frac{4i^{23}-i}{1+2i}$;
 $z_3 = i^{83} + (1-i)^6$.

- A) $7i-20$ B) $7i$ C) $10i$
D) $8i$ E) $-7i$

83. Halle el módulo del número complejo W.

$$W = \frac{ze^{i(|z|^2+5|z|+2)}(3+4i)(\sqrt{3}+i)}{(-1+\sqrt{3}i)}$$

$$\text{si: } z = 1+i$$

- A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 5
D) $5\sqrt{2}$ E) 10

84. Si el cociente de dos números complejos es imaginario puro, su suma es igual a uno y además el módulo del cociente es igual al módulo de la suma, entonces uno de los números complejos es:

A) $\frac{1}{2}(1-2i)$ B) $\frac{1}{2}(1+2i)$ C) $\frac{1}{2}(1-i)$
D) $\frac{1}{2}(2+i)$ E) $\frac{1}{3}(2i+1)$

85. Halle el área de la siguiente región:

$$R = \{z \in \mathbb{C} \mid |e^z| \leq 1 \text{ y } |z| \leq 1\}$$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$
D) $\frac{3\pi}{4}$ E) π

86. Sean: $x = m + n$, $y = mw + nw^2$ y $z = mw^2 + nw$, donde w y w^2 son raíces cúbicas de la unidad. Determinar el valor de $A = x^4 + y^4 + z^4$.

A) $6mn$ B) $6m^2n^2$ C) $6(m^2+n^2)$
D) $18m^2n^2$ E) m^2n^2

87. ¿Cuántas raíces complejas de la ecuación $w^{100} - 1 = 0$ tienen argumentos en el intervalo $\left[\frac{\pi}{25}, \frac{4\pi}{25}\right)$?

A) 0 B) 4 C) 5
D) 8 E) 10

88. Si $z = 1 + i$; determine la parte real de la raíz cúbica de z que tiene mayor argumento.

A) $\cos\left(17\frac{\pi}{12}\right)$ B) $\sin\left(17\frac{\pi}{12}\right)$
C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}\cos\left(17\frac{\pi}{12}\right)$ E) $\sqrt{2}\cos\left(17\frac{\pi}{12}\right)$

89. Determine la parte real del número complejo $z = (1+i)e^{iwt}$, $w, z \in \mathbb{R}$.

A) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + wt\right)$ B) $\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{4} + wt\right)$
C) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + wt\right)$
D) $\sqrt{2}\cos wt$ E) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} + wt\right)$

90. Una de las raíces cúbicas de

$$z = 4\sqrt{3} - 4i \text{ es:}$$

A) $2e^{i\left(\frac{11\pi}{9}\right)}$ B) $2e^{i\left(\frac{35\pi}{9}\right)}$ C) $2e^{i\left(\frac{23\pi}{18}\right)}$
D) $2e^{i\left(\frac{21\pi}{18}\right)}$ E) $2e^{i\left(\frac{39\pi}{18}\right)}$

91. Si z_1 y z_2 son las raíces cuadradas del número complejo $z \neq 0$, entonces el valor de $(z_1 + z_2)^3$ es:

A) $z_1 z_2$ B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

92. Sea $\{z_1, z_2, z_3\}$ el conjunto solución de la ecuación:

$$(z^3 - iz^2) - (1+2i)(z^2 - iz) + 2(iz+1) = 0$$

Determine el valor de: $|z_1| + |z_2| + |z_3|$

A) 2 B) 4 C) $4\sqrt{2}$
D) 6 E) 8

93. Determine el valor de la expresión:

$$\sqrt[3]{-2i} + \sqrt[3]{-2i} + \sqrt[3]{-2i} + \dots$$

A) $-2i$ B) $-i$ C) 1
D) i E) $2i$

94. Si $z \in \mathbb{C}$, tal que $z^{15} = i$, determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

I. Tres raíces están en el segundo cuadrante.

II. Si $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{15}$ son las raíces, entonces $z_1 + z_2 + \dots + z_{15} = 0$

III. Si $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{15}$ son las raíces, entonces $|z_1| + |z_2| + \dots + |z_{15}| = 15$

- A) VVV B) VVF C) VFF
D) FVV E) FFF

95. Sean z_0, z_1 y z_2 tres números complejos que, gráficamente, se encuentran en una circunferencia de 4π de longitud y además son las raíces cúbicas de un número complejo. Determine el polinomio mónico de menor grado $P(z)$ tal que: $P(z_0) = P(z_1) = P(z_2) = 0$, si el argumento de z_0 es igual a cero.

- A) $z^3 + 8i$ B) $z^3 - 8$ C) $z^3 - z^2 - 8$
D) $z^3 + z - 8$ E) $z^3 - z$

96. Dado $n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$, resolver en el conjunto de los números complejos la ecuación: $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$.

- A) $\frac{-i \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}; k = 1, 2, \dots, n-1$
B) $\frac{-i \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}; k = 1, 2, \dots, n-1$
C) $\frac{i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}; k = 1, 2, \dots, n-1$
D) $\frac{-\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}; k = 1, 2, \dots, n-1$
E) $\frac{i \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}; k = 1, 2, \dots, n-1$

97. $P(z) = (a - \alpha)z^3 + (4 + 2i)z + 6, z \in \mathbb{C}$

¿Qué valor de α hace que $P(1 + i)$ sea un complejo imaginario puro?

- A) -5 B) -4 C) -3
D) -2 E) 3

98. Sean z_1 y z_2 las raíces de la ecuación:

$z^2 - (5 - i)z + 12 - 5i = 0$. Si z_1 se encuentra en el semiplano superior,

entonces el cociente $\frac{z_1}{z_2}$ es igual a:

- A) -i B) $1 - i$ C) 1
D) i E) $i + 1$

99. Una de las raíces de la ecuación:

$$(z^2 + 2iz - 1)^2 = 16z^4 \text{ es:}$$

- A) -i B) $1 - i$ C) 1
D) i E) $1 + i$

100. Determine el cardinal del conjunto:

$A = \{z \in \mathbb{C} / z \text{ satisface las condiciones (*)}\}$

$$(*) \begin{cases} \frac{\operatorname{Im}(z)}{|\operatorname{Im}(z)|} \geq 0 \\ |z - 1| \geq 1 \\ |z + 1| \geq 1 \\ |z| \leq 2 \\ \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**Resolución 1:**

$$z = \frac{z_1 + 2z_2}{iz_3}$$

$$z = \frac{3 + 5i + 2(-5 + i)}{i(1 - i)} = \frac{-7 + 7i}{i + 1}$$

$$z = \frac{7i^2 + 7i}{i + 1} = \frac{7i(i + 1)}{i + 1}$$

$$\therefore z = 7i$$

Rpta.: D**Resolución 2:**

En cada proposición tenemos:

I. Verdadero.

$$\text{Sea: } z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

$$\text{Nótese que: } z - \bar{z} = 2x = 2\text{Re}(z)$$

II. Falso

$$\text{Sea: } z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

$$\text{Nótese que: } z - \bar{z} = 2yi = 2\text{Im}(z)i$$

III. Verdadero

$$\text{Sea: } z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

$$\text{Nótese que: } z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

IV. Verdadero

$$\text{Sea: } z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

$$\text{Por condición: } z = \bar{z} \Leftrightarrow x + yi = x - yi$$

$$2yi = 0$$

$$y = 0$$

$$\text{Luego: } z = x$$

 $\therefore$ Combinación correcta = VFVV**Rpta.: A**

Resolución 3: Sea $z = x + yi$, por condición:

$$\begin{aligned}(z + \bar{z})^3 + \operatorname{Re}(z) &= 0 \\(x + yi + x - yi)^3 + x &= 0 \\(2x)^3 + x &= 0 \\8x^3 + x &= 0 \\x(8x^2 + 1) &= 0\end{aligned}$$

Aquí reconocemos que: $x = 0$

$$\therefore \operatorname{Re}(z) = 0$$

Rpta.: E

Resolución 4: Se pide calcular:

$$\begin{aligned}K &= \left| \frac{100 - ai}{a - 100i} \right| + \left| \frac{\sqrt{3} - ai}{\sqrt{3}i + a} \right| \\K &= \frac{|100 - ai|}{|a - 100i|} + \frac{|\sqrt{3} - ai|}{|\sqrt{3}i + a|} \\K &= \frac{\sqrt{(100)^2 + (-a)^2}}{\sqrt{a^2 + (-100)^2}} + \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-a)^2}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + a^2}} \\K &= \frac{\sqrt{(100)^2 + a^2}}{\sqrt{a^2 + (100)^2}} + \frac{\sqrt{3 + a^2}}{\sqrt{3 + a^2}} \\K &= 1 + 1 \\K &= 2\end{aligned}$$

Rpta.: B

Resolución 5: Se tiene por condición:

$$\begin{aligned}a + bi &= \sqrt{7 + 24i} \\|a + bi| &= |\sqrt{7 + 24i}| \\|a + bi| &= \sqrt{|7 + 24i|} \\\sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt[4]{7^2 + 24^2} \\\sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt[4]{25^2} \\\sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{25} \\\therefore a^2 + b^2 &= 25\end{aligned}$$

Rpta.: B

Resolución 6:

Se tiene:

$$R = \frac{5-5i}{1-\frac{1+i}{1-i}}$$

$$R = \frac{5-5i}{1-i}$$

$$R = \frac{5(1-i)}{1-i}$$

$$\therefore R = 5$$

Rpta.: D**Resolución 7:**

Sea la expresión:

$$K = \sqrt{2\sqrt{i} - \sqrt{2i}}$$

$$K = \sqrt{2\sqrt{i} - \sqrt{(1+i)^2}}$$

$$K = \sqrt{2\sqrt{i} - (1+i)}$$

$$K = \sqrt{2\sqrt{i-1-i}}$$

$$K = \sqrt{2\sqrt{-1}} = \sqrt{2i} = \sqrt{(i+1)^2}$$

$$\therefore K = 1+i$$

Rpta.: A**Resolución 8:**

Se tiene el complejo:

$$z = \left[\frac{7i^3 + 5i^5 + 3i^7}{3i^{-3} + 5i^{-5} + 7i^{-7}} \right]^{4^{321}} + 2i^{2^{34}}$$

$$z = \left[\frac{-7i + 5i - 3i}{3i - 5i + 7i} \right]^{4^{321}} + 2i^{2^{34}}$$

$$z = \left(\frac{-5i}{5i} \right)^4 + 2i^0 = (-1)^4 + 2(1)$$

$$z = 1 + 2 = 3$$

$$\therefore |z| = 3$$

Rpta.: C

Resolución 9:

Datos:

$$z = 1 + i \wedge w = 1 - i$$

Se pide calcular:

$$K = \left(\frac{z}{w} \right)^{100}$$

$$K = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{100}$$

$$K = (i)^{100} = i^4$$

$$\therefore K = 1$$

Rpta.: E

Resolución 10:

Se tiene:

$$z = \frac{1+i}{1-i} - \left(\frac{1-i}{1+i} \right) - \sqrt{-4}$$

$$z = i - (-i) - 2i$$

$$z = i + i - 2i$$

$$\therefore z = 0$$

Rpta.: E

Resolución 11:

Se tiene:

$$z = \frac{(1+i)^2 + (1-i)^3}{(1-i)^2 + (1+i)^3}$$

$$z = \frac{(1+i)^2 + (1-i)^2(1-i)}{(1-i)^2 + (1+i)^2(1+i)}$$

$$z = \frac{2i + (-2i)(1-i)}{-2i + (2i)(1+i)}$$

$$z = \frac{2i - 2i - 2}{-2i + 2i - 2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\text{Finalmente tenemos: } K = \frac{\operatorname{Re}(z) + 1}{\operatorname{Im}(z) - 1} = \frac{1+1}{0-1} = \frac{2}{-1}$$

$$\therefore K = -2$$

Rpta.: D

Resolución 12:

Se tiene:

$$z = 3i^{27} + 4i^{37} - i^{30}$$

$$z = 3(-i) + 4(i) - (-1)$$

$$z = -3i + 4i + 1$$

$$\therefore z = 1 + i$$

Rpta.: A

Resolución 13: Por condición:

$$E = \frac{(\sqrt{3} + i)^n}{(1 - i)^{n-3}}$$

$$|E| = \frac{|(\sqrt{3} + i)^n|}{|(1 - i)^{n-3}|} = \frac{|\sqrt{3} + i|^n}{|1 - i|^{n-3}}$$

$$|E| = \frac{2^n}{\sqrt{2}^{n-3}} = \frac{\sqrt{2}^{2n}}{\sqrt{2}^{n-3}} = \sqrt{2}^{n+3}$$

Por dato:

$$\sqrt{2}^{n+3} = 32 \Leftrightarrow 2^{\frac{n+3}{2}} = 2^5$$

$$\frac{n+3}{2} = 5 \Leftrightarrow n+3 = 10$$

$$\therefore n = 7$$

Rpta.: C**Resolución 14:** Se tiene

$$z = (1 + i)^{10} = (2i)^5$$

$$z = 32i^5 = 32i$$

$$\therefore \text{Im}(z) = 32$$

Rpta.: A**Resolución 15:** Se tiene:

$$A = \frac{(1 + i)^2(3 - 5i)}{3i + 5}$$

$$A = \frac{(2i)(3 - 5i)}{3i + 5}$$

$$A = \frac{2(3i - 5i^2)}{3i + 5}$$

$$A = \frac{2(3i + 5)}{3i + 5}$$

$$\therefore A = 2$$

Rpta.: B**Resolución 16:** Se pide calcular:

$$K = \text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \text{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right)$$

Por propiedad:

$$K = \text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2}\right)$$

$$K = \text{Re}\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 + z_2}\right) = \text{Re}(1)$$

$$\therefore K = 1$$

Rpta.: E

Resolución 17: Por condición: $\frac{z+1}{z-1} = mi$

Por propiedad: $z = \frac{mi+1}{mi-1}$

$$|z| = \frac{|mi+1|}{|mi-1|}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\therefore |z| = 1$$

Rpta.: D

Resolución 18: Por dato: $z = 3 + 2i \Rightarrow \bar{z} = 3 - 2i$

Nótese que: $\bar{z}^* = -3 + 2i$

Se pide calcular: $M = |z + \bar{z} + \bar{z}^*| + 2\sqrt{13}$

$$M = |3 + 2i + 3 - 2i - 3 + 2i| + 2\sqrt{13}$$

$$M = |3 + 2i| + 2\sqrt{13} = \sqrt{13} + 2\sqrt{13}$$

$$\therefore M = 3\sqrt{13}$$

Rpta.: B

Resolución 19: Se pide calcular: $K = |1+z|^2 - |1+w|^2$

Por propiedad tenemos:

$$K = (1+z)(\overline{1+z}) - (1+w)(\overline{1+w})$$

$$K = (1+z)(1+\bar{z}) - (1+w)(1+\bar{w})$$

$$K = 1 + \bar{z} + z + |z|^2 - 1 - \bar{w} - w - |w|^2$$

$$K = z + \bar{z} - (w + \bar{w})$$

$$K = 2\operatorname{Re}(z) - 2\operatorname{Re}(w) = 2[\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(w)] = 2 \cdot 0$$

$$\therefore K = 0$$

Rpta.: E

Resolución 20: Por condición tenemos:

$$x + yi = (3 + i)(2 + i)$$

$$x + yi = 6 + 3i + 2i - 1$$

$$x + yi = 5 + 5i$$

Aquí reconocemos que:

$$x = 5 \wedge y = 5$$

$$\therefore x^5 - y^5 = 0$$

Rpta.: D**Resolución 21:** Se tiene la última expresión:

$$w = \sum_{n=2}^{15} \left[\frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(2n-1)(2n+1)} \right]$$

$$w = \sum_{n=2}^{15} \left[\frac{4i}{(2n-1)(2n+1)} \right]$$

$$w = 2i \sum_{n=2}^{15} \left[\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \right]$$

$$w = 2i \sum_{n=2}^{15} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

Aplicando la regla telescópica tenemos:

$$w = 2i \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{31} \right)$$

$$w = 2i \left(\frac{28}{93} \right) = \frac{56}{93} i$$

$$\therefore |w| = \frac{56}{93}$$

Rpta.: A**Resolución 22:** Se tiene:

$$F(x; y) = x + yi$$

$$F(k; -k) = k - ki$$

$$F(k; -k) = k(1 - i)$$

Se pide calcular:

$$E = \sum_{k=-5}^5 F(k; -k)$$

$$E = \sum_{k=-5}^5 [k(1 - i)]$$

$$E = (1 - i) \sum_{k=-5}^5 (k)$$

$$E = (1 - i) \cdot (-5 - 4 - 3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

$$E = (1 - i) \cdot 0$$

$$\therefore E = 0$$

Rpta.: E

Resolución 23: Por condición tenemos:

$$\sqrt{a+bi} = m+ni$$

$$|\sqrt{a+bi}| = |m+ni|$$

$$\sqrt{|a+bi|} = |m+ni|$$

$$|a+bi| = |m+ni|^2$$

$$\sqrt{a^2+b^2} = m^2+n^2$$

$$a^2+b^2 = (m^2+n^2)^2$$

Se pide calcular: $K = \frac{2(a^2+b^2)}{(m^2+n^2)^2} = \frac{2(m^2+n^2)^2}{(m^2+n^2)^2}$

$$\therefore K = 2$$

Rpta.: B

Resolución 24:

Se tiene el complejo: $z = (\sin \alpha + i \cos \alpha)(\sin 2\alpha + i \cos 2\alpha) \dots (\sin n\alpha + i \cos n\alpha)$

Al considerar el módulo a ambos miembros de la igualdad fácilmente podemos reconocer que cada factor del segundo miembro tiene por módulo a la unidad, luego tenemos que:

$$|z| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 + 0i$$

Por condición tenemos:

$$|z| = a^a + bi$$

Aquí reconocemos que:

$$a = 1 \wedge b = 0$$

$$\therefore a^3 + b^3 = 1$$

Rpta.: E

Resolución 25:

Se tiene:

$$[(1+i)^7 + (1-i)^7]^n = 4096$$

$$[\{(1+i)^2\}^3(1+i) + \{(1-i)^2\}^3(1-i)]^n = 4096$$

$$[\{2i\}^3(1+i) + \{-2i\}^3(1-i)]^n = 4096$$

$$[-8i(1+i) + 8i(1-i)]^n = 4096$$

$$[-8i + 8 + 8i + 8]^n = 4096$$

$$16^n = 4096$$

$$2^{4n} = 2^{12}$$

$$4n = 12$$

$$\therefore n = 3$$

Rpta.: E

Resolución 26: Por condición tenemos:

$$\left[(1+i)^n + 2(-2+2i)^{\frac{1}{3n}} + 3(-4)^{\frac{1}{4n}} \right]^{n^2} = -6^{16} \cdot 4$$

Aplicando propiedades:

$$\left[(1+i)^n + 2\{(1+i)^3\}^{\frac{1}{3n}} + 3\{(1+i)^4\}^{\frac{1}{4n}} \right]^{n^2} = -6^{16} \cdot 4$$

$$\left[(1+i)^n + 2(1+i)^n + 3(1+i)^n \right]^{n^2} = -6^{16} \cdot 4$$

$$\left[6(1+i)^n \right]^{n^2} = -6^{16} \cdot 4$$

$$6^{n^2} (1+i)^n = -6^{16} \cdot 4$$

$$6^{n^2} (1+i)^n = i^2 \cdot 6^{16} \cdot 2^2$$

$$6^{n^2} (1+i)^n = 6^{16} \cdot (2i)^2$$

$$6^{n^2} (1+i)^n = 6^{16} \cdot [(1+i)^2]^2$$

$$6^{n^2} (1+i)^n = 6^{16} \cdot (1+i)^4$$

$$\therefore n = 4$$

Rpta.: C

Resolución 27: Se tiene:

$$a + bi = [(2-3i)^{1+i}]^{1-i^{3334}}$$

$$a + bi = [(2-3i)^{1+i}]^{1-i}$$

$$a + bi = (2-3i)^{(1+i)(1-i)}$$

$$a + bi = (2-3i)^2$$

$$a + bi = -5 - 12i$$

Aquí reconocemos que: $a = -5 \wedge b = -12$

$$\therefore 2a - b = 2$$

Rpta.: E

Resolución 28: Se tiene:

$$\begin{aligned} z &= 1 + i \Rightarrow \bar{z} = 1 - i \\ \bar{z}^2 &= -2i \\ \bar{z}^4 &= -4 \end{aligned}$$

Se pide calcular:

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{1}{z}\right)^{\left(\frac{1}{z}\right)^4} = \left(\frac{1}{z}\right)^{\left(\frac{1}{z}\right)^4} \\ E &= \left(\frac{1}{z}\right)^{z^4} = \left(\frac{1}{z}\right)^{-4} = z^4 \\ \therefore E &= -4 \end{aligned}$$

Rpta.: C

Resolución 29: Se tiene:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 + 4n^2 i}{8n^2 - i} \\ z - \frac{3i}{4} &= \frac{1 + 4n^2 i}{8n^2 - i} - \frac{3i}{4} \\ z - \frac{3i}{4} &= \frac{4 + 16n^2 i - 24n^2 i - 3}{4(8n^2 - i)} \\ z - \frac{3i}{4} &= \frac{1 - 8n^2 i}{4(8n^2 - i)} \\ \left| z - \frac{3i}{4} \right| &= \frac{|1 - 8n^2 i|}{4|8n^2 - i|} \\ \left| z - \frac{3i}{4} \right| &= \frac{\sqrt{1 + 64n^4}}{4\sqrt{64n^4 + 1}} \\ \therefore \left| z - \frac{3i}{4} \right| &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Rpta.: B

Resolución 30: La igualdad propuesta se puede reescribir así:

$$\begin{aligned} \frac{1 + ai}{a + i} + \frac{(a + 3i)i}{(1 - ai)i} &= ki \\ \frac{1 + ai}{a + i} + \frac{ai - 3}{i + a} &= ki \\ \frac{-2 + 2ai}{a + i} &= ki \\ -2 + 2ai &= -k + aki \end{aligned}$$

Aquí reconocemos: $k = 2$

$$\therefore k^4 + 1 = 17$$

Rpta.: C

Resolución 31: Por condición: $f(a + bi) = f(b) + i f(a)$ (1)

Sea la expresión: $E = \sum_{k=1}^{2002} f(k + i)$

$$E = \sum_{k=1}^{2002} [f(1) + i f(k)]$$

$$E = 2002 f(1) + i \sum_{k=1}^{2002} f(k) \text{(2)}$$

En (1): $a = 1 \wedge b = 0 \Rightarrow f(1) = f(0) + i f(1)$

$$(1 - i) f(1) = f(0) \text{(3)}$$

En (1): $a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow f(0) = f(0) + i f(0)$

$$0 = i f(0)$$

Aquí reconocemos que $f(0) = 0$, luego en (3) tenemos:

$$(1 - i) f(1) = 0$$

$$f(1) = 0$$

En (1): $a = k \wedge b = 0 \Rightarrow f(k) = f(0) + i f(k)$

$$(1 - i) f(k) = 0$$

$$f(k) = 0; \forall k \in \mathbb{R}$$

Finalmente en (2) tenemos:

$$E = 2002 \cdot (0) + i(0)$$

$$E = 0 + 0$$

$$\therefore E = 0$$

Rpta.: C

Resolución 32: Por condición: $z + \frac{1}{z} = \bar{z}$

Sea el complejo $z = x + yi$:

$$x + yi + \frac{1}{x + yi} = x - yi$$

$$\frac{1}{x + yi} = -2yi$$

$$\frac{x - yi}{x^2 + y^2} = -2yi$$

$$\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i = -2yi$$

Aquí se cumple que: $x = 0 \wedge \frac{1}{y} = 2y$

$$x = 0 \wedge y^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \wedge y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

Rpta.: B

Resolución 33:

Por condición:

$$\sqrt{3} + (1 + 2w)i = 0$$

$$\sqrt{3}i + (1 + 2w)i^2 = 0$$

$$\sqrt{3}i - 1 - 2w = 0$$

$$2w = -1 + \sqrt{3}i$$

$$w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Elevando al cubo: $w^3 = 1$

Se pide calcular: $w^{10} = (w^3)^3 \cdot w$

$$w^{10} = (1)^3 \cdot w$$

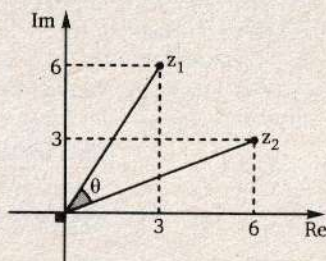
$$w^{10} = 1 \cdot w = w$$

$$\therefore w^{10} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Rpta.: C

Resolución 34:

Graficando los complejos:



Fácilmente reconocemos que:

$$\theta = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

$$\theta = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

Ahora se plantea que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 6i}{6 + 3i} = \frac{1 + 2i}{2 + i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1 + 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 + 3i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\therefore \cos(\theta) = \frac{4}{5}$$

Rpta.: D

Resolución 35: De la condición: $\arg(z^2) = \pi$

$$\arg(\sqrt{z}) = \frac{\pi}{4}$$

Con lo cual tenemos:

$$\operatorname{Re}(\sqrt{z}) = \operatorname{Im}(\sqrt{z})$$

Por condición tenemos:

$$\operatorname{Re}(\sqrt{z}) + 2\operatorname{Im}(\sqrt{z}) = 18$$

$$3\operatorname{Re}(\sqrt{z}) = 18$$

$$\operatorname{Re}(\sqrt{z}) = 6$$

Ahora se plantea: $\sqrt{z} = 6 + 6i$

$$z = (6 + 6i)^2$$

$$\therefore z = 72i$$

Rpta.: E

Resolución 36: Teniendo en cuenta al teorema fundamental del álgebra, todas las proposiciones son verdaderas.

I. $P(z)$ puede ser: $P(z) \equiv (z - 3i)(z + 7)(z - 4)$

II. $P(z)$ puede ser: $P(z) \equiv (z - 4i)(z + i)(z - 3)$

III. $P(z)$ puede ser: $P(z) \equiv (z - 2 - i)(z + 3i)(z + 1 - 4i)$

$$\therefore \text{Combinación correcta} = \text{VVV}$$

Rpta.: D

Resolución 37: La expresión dada es:

$$E = \frac{[(a + bi)^2]^2 + [(a - bi)^2]^2 + 12a^2b^2}{a^4 + b^4}$$

$$E = \frac{[(a^2 - b^2) + 2abi]^2 + [(a^2 - b^2) - 2abi]^2 + 12a^2b^2}{a^4 + b^4}$$

$$E = \frac{2[(a^2 - b^2) + (2abi)^2] + 12a^2b^2}{a^4 + b^4}$$

$$E = \frac{2(a^4 + b^4 - 2a^2b^2 - 4a^2b^2) + 12a^2b^2}{a^4 + b^4}$$

$$E = \frac{2a^4 + 2b^4 - 12a^2b^2 + 12a^2b^2}{a^4 + b^4}$$

$$E = \frac{2a^4 + 2b^4}{a^4 + b^4} = \frac{2(a^4 + b^4)}{a^4 + b^4}$$

$$\therefore E = 2$$

Rpta.: C

Resolución 38: La expresión propuesta se puede reescribir así:

$$E = \frac{(1+i)^2(1+i) + (1-i)^2(1-i)}{(1+i)^2(1+i) - (1-i)^2(1-i)}$$

$$E = \frac{(2i)(1+i) + (-2i)(1-i)}{(2i)(1+i) - (-2i)(1-i)}$$

$$E = \frac{2i - 2 - 2i - 2}{2i - 2 + 2i + 2} = \frac{-4}{4i}$$

$$E = \frac{-1}{i} = \frac{i^2}{i}$$

$$\therefore E = i$$

Rpta.: C

Resolución 39: Sea "K" la expresión, luego tenemos:

$$K = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} - \sqrt{2}i) - (\sqrt{3} + \sqrt{2}i)(\sqrt{2} - \sqrt{3}i)}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}i)(\sqrt{3} - \sqrt{2}i)}$$

$$K = \frac{2\sqrt{6} + i - (2\sqrt{6} - i)}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2}i)^2} = \frac{i + i}{3 + 2} = \frac{2i}{5}$$

$$\therefore K = \frac{2}{5}i$$

Rpta.: D

Resolución 40: La ecuación propuesta se puede reescribir así:

$$\frac{1}{a+bi} + (i)^2 = 1 + i$$

$$\frac{1}{a+bi} - 1 = 1 + i$$

$$\frac{1}{a+bi} = 2 + i$$

$$a+bi = \frac{1}{2+i}$$

$$a+bi = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)}$$

$$a+bi = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

Aquí reconocemos que:

$$a = \frac{2}{5} \wedge b = -\frac{1}{5}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = -2$$

Rpta.: B

Resolución 41: Sea la expresión dada "E", luego tenemos:

$$E = (11 + 2i)^{17} + [(1 + 2i)^3]^{17} + 1$$

$$E = (11 + 2i)^{17} + (-11 - 2i)^{17} + 1$$

$$E = \underbrace{(11 + 2i)^{17} - (11 + 2i)^{17}}_{\text{es cero}} + 1$$

$$\therefore E = 1$$

Rpta.: A

Resolución 42: De la igualdad propuesta:

$$\sqrt[3]{4 - 2i} = a + bi$$

Elevando al cubo obtenemos:

$$4 - 2i = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$$

Ahora se plantea que:

$$a^3 - 3ab^2 = 4 \quad \dots\dots(1)$$

$$3a^2b - b^3 = -2 \quad \dots\dots(2)$$

Multiplicando (1) por a:

$$a^4 - 3a^2b^2 = 4a \quad \dots\dots(3)$$

Multiplicando (2) por b:

$$3a^2b^2 - b^4 = -2b \quad \dots\dots(4)$$

Efectuando (3) + (4):

$$a^4 - b^4 = 4a - 2b$$

$$a^4 - b^4 = 2(2a - b)$$

$$\therefore \frac{a^4 - b^4}{2a - b} = 2$$

Rpta.: B

Resolución 43: La expresión dada se puede reescribir así:

$$E = \frac{(\sqrt{a - bi} + \sqrt{a + bi}) (i)}{(\sqrt{a + bi} - \sqrt{a - bi}) (i)}$$

$$E = \frac{(\sqrt{a - bi} + \sqrt{a + bi}) (i)}{\sqrt{a + bi} i + \sqrt{a - bi}}$$

$$\therefore E = i$$

Rpta.: E

Resolución 44: Sea "K" la expresión, luego por teorema se tendrá:

$$K = \frac{(\cos 51^\circ + i \sin 51^\circ)[2(\cos 56^\circ + i \sin 56^\circ)]}{\cos 77^\circ + i \sin 77^\circ}$$

$$K = \frac{2[\cos(51^\circ + 56^\circ) + i \sin(51^\circ + 56^\circ)]}{\cos 77^\circ + i \sin 77^\circ}$$

$$K = \frac{2[\cos(107^\circ) + i \sin(107^\circ)]}{\cos 77^\circ + i \sin 77^\circ}$$

$$K = 2[\cos(107^\circ - 77^\circ) + i \sin(107^\circ - 77^\circ)]$$

$$K = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore K = \sqrt{3} + i$$

Rpta.: A

Resolución 45: Por condición se plantea que:

$$\frac{m + 3i}{2 - 5i} = ki; \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$m + 3i = 5k + 2ki$$

$$\text{Aquí reconocemos que: } 2k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$\text{Asimismo también que: } m = 5k \Rightarrow m = \frac{15}{2}$$

$$\text{Finalmente tenemos: } 2m - 1 = 2\left(\frac{15}{2}\right) - 1$$

$$\therefore 2m - 1 = 14$$

Rpta.: B

Resolución 46: Nótese que:

$$i - 2 = i + 2i^2 = i(1 + 2i)$$

$$(i - 2)^4 = [i(1 + 2i)]^4$$

$$(i - 2)^4 = i^4 (1 + 2i)^4$$

$$(i - 2)^4 = (1 + 2i)^4$$

Ahora el complejo z será:

$$z = \frac{(1 + 2i)^{12} + 4(1 + 2i)^8 + 4(1 + 2i)^4}{(1 + 2i)^8 + 4(1 + 2i)^4 + 4}$$

$$z = \frac{(1 + 2i)^4 [(1 + 2i)^8 + 4(1 + 2i)^4 + 4]}{(1 + 2i)^8 + 4(1 + 2i)^4 + 4}$$

$$z = (1 + 2i)^4 = [(1 + 2i)^2]^2$$

$$z = (-3 + 4i)^2 = -7 - 24i$$

$$\text{Finalmente tenemos: } |z| = \sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} = \sqrt{625}$$

$$\therefore |z| = 25$$

Rpta.: C

Resolución 47: Sea "K" la expresión y dando uso de la propiedad:

$$|z_1| = |\bar{z}_1|; \forall z_1 \in \mathbb{C}, \text{ tenemos:}$$

$$K = |z|^2 + |w|^2 + |z \cdot \bar{w}| + |z \cdot \bar{w}|$$

$$K = |z|^2 + |w|^2 + |z| \cdot |\bar{w}| + |z| \cdot |\bar{w}|$$

$$K = |z|^2 + |w|^2 + |z| \cdot |w| + |z| \cdot |w|$$

$$K = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2$$

$$K = (4 + 6)^2 = (10)^2$$

$$\therefore K = 100$$

Rpta.: C

Resolución 48: La igualdad propuesta es:

$$|z + 16| = 4|z + 1|$$

Elevando al cuadrado: $|z + 16|^2 = 16|z + 1|^2$

$$(z + 16)(\bar{z} + 16) = 16(z + 1)(\bar{z} + 1)$$

$$(z + 16)(\bar{z} + 16) = 16(z + 1)(\bar{z} + 1)$$

$$z \cdot \bar{z} + 16z + 16\bar{z} + 256 = 16z \cdot \bar{z} + 16z + 16\bar{z} + 16$$

$$240 = 15z \cdot \bar{z}$$

$$240 = 15|z|^2$$

$$16 = |z|^2$$

$$\therefore |z| = 4$$

Rpta.: D

Resolución 49: Sea el complejo: $z = i$

En forma exponencial tenemos:

$$z = |z| e^{i\theta}$$

$$z = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

En forma equivalente:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Elevando al exponente i:

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^i$$

$$\therefore i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Rpta.: D

Resolución 50: El número complejo dado se puede reescribir así:

$$z = (3 + 4i)^{3-i} \cdot 5^{i-3}$$

$$z = \frac{(3 + 4i)^{3-i}}{5^{3-i}}$$

$$z = \left(\frac{3 + 4i}{5} \right)^{3-i}$$

$$z = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right)^{3-i}$$

Expresando la base en forma exponencial tenemos:

$$z = \left[e^{\frac{53\pi}{180}i} \right]^{3-i}$$

$$z = e^{\frac{53\pi}{60}i + \frac{53\pi}{180}}$$

$$z = e^{\frac{53\pi}{180}} \cdot e^{\frac{53\pi}{60}i}$$

$$\therefore \arg(z) = \frac{53\pi}{60}$$

Rpta.: A

Resolución 51: De acuerdo con la teoría tenemos:

$$z = |z| e^{i\theta} \wedge \bar{z} = |z| e^{-i\theta}$$

Reemplazando en la condición:

$$\left(\frac{|z| e^{i\theta}}{|z| e^{-i\theta}} \right)^3 + \left(\frac{|z| e^{-i\theta}}{|z| e^{i\theta}} \right)^3 = 1$$

$$e^{6i\theta} + e^{-6i\theta} = 1$$

Por la fórmula de Euler:

$$2\cos(6\theta) = 1$$

$$\cos(6\theta) = \frac{1}{2}$$

Por ángulo triple: $\cos(18\theta) = 4\cos^3(6\theta) - 3\cos(6\theta)$

$$\cos(18\theta) = 4\left(\frac{1}{8}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\cos(18\theta) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\therefore \cos(18\theta) = -1$$

Rpta.: C

Resolución 52: Transformando en función del ángulo mitad:

$$z = \frac{1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 + 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)i}{1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 - 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)i}$$

$$z = \frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)i}{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)i}$$

$$z = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)i}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)i}$$

$$z = \frac{e^{\frac{\theta}{2}i}}{e^{-\frac{\theta}{2}i}} = e^{\frac{\theta}{2}i + \frac{\theta}{2}i}$$

$$\therefore z = e^{\theta i}$$

Rpta.: D

Resolución 53: Sea "K" el equivalente, luego:

$$K = \frac{2}{i} \ln\left(\frac{1+i}{1-i}\right) \dots\dots(1)$$

Dando uso de las propiedades tenemos que:

$$\frac{1+i}{1-i} = i$$

Ahora en forma exponencial tenemos:

$$\frac{1+i}{1-i} = i = e^{2\frac{\pi}{2}i} \dots\dots(2)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$$K = \frac{2}{i} \ln\left(e^{2\frac{\pi}{2}i}\right)$$

$$K = \frac{2}{i} \cdot \frac{\pi}{2} i \cdot \ln(e)$$

$$K = \frac{2\pi i}{2i} \cdot 1$$

$$\therefore K = \pi$$

Rpta.: C

Resolución 54: La igualdad mostrada es:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n = -i$$

En forma exponencial tenemos:

$$\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^n = e^{\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)i}$$

$$e^{\frac{n\pi}{6}i} = e^{\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)i}$$

$$\frac{n\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\frac{n}{6} = \frac{3}{2} + 2k$$

$$n = 12k + 9$$

Por condición se plantea:

$$1000 \leq n < 10000$$

$$1000 \leq 12k + 9 < 10000$$

$$82,6 \leq k < 832,6$$

Aquí reconocemos que si "n" es mínimo, "k" es mínimo:

$$k = 83$$

Finalmente tenemos: $n = 12(83) + 9$

$$\therefore n = 1005$$

Rpta.: C

Resolución 55: Se sabe que: $(n+b)^m = n^m + b^m; m \in \mathbb{N}$

En el problema se tendrá:

$$K = i^{(4+1)^{2^3^4}} + i^{(4+1)^{6^7^8}} + i^{(4+1)^{10^11^{12}}} + i^{(4+1)^{14^15^{16}}}$$

$$K = i^{4+1} + i^{4+1} + i^{4+1} + i^{4+1}$$

$$K = i + i + i + i$$

$$\therefore K = 4i$$

Rpta.: B

Resolución 56: En cada proposición tenemos:

I. Verdadero (V)

En efecto si: $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R} \wedge \sqrt[3]{-1} \in \mathbb{R}$, entonces: $\sqrt[3]{(2) \cdot (-1)} = \sqrt[3]{(-2)} \in \mathbb{R}$

II. Falso (F)

Las cantidades imaginarias no gozan de la relación de orden.

III. Falso (F)

Nótese que:
$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{-1} = i \\ \sqrt{-2} = \sqrt{2}i \end{array} \right\} \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-2} = -\sqrt{2}$$

$\therefore$ Combinación correcta: VFF

Rpta.: D

Resolución 57: Del diagrama tenemos:

$$z_1 = 3 + 5i; z_2 = -5 - i; z_3 = -1 - 3i$$

El complejo z viene dado por:

$$z = (-5 - i)(-1 - 3i) - 2(3 + 5i)$$

$$z = (5 + i)(1 + 3i) - 6 - 10i$$

$$z = 5 + 15i + i - 3 - 6 - 10i$$

$$z = -4 + 6i$$

$$\therefore \operatorname{Re}(z) = -4$$

Rpta.: C

Resolución 58: Sea la expresión:

$$z = \frac{\operatorname{cis}(26^\circ) \operatorname{cis}(40^\circ)}{\operatorname{cis}(19^\circ) \operatorname{cis}(10^\circ)}$$

$$z = \frac{\operatorname{cis}(26^\circ + 40^\circ)}{\operatorname{cis}(19^\circ + 10^\circ)} = \frac{\operatorname{cis}(66^\circ)}{\operatorname{cis}(29^\circ)}$$

$$z = \operatorname{cis}(66^\circ - 29^\circ) = \operatorname{cis}(37^\circ)$$

$$z = \cos(37^\circ) + i \operatorname{sen}(37^\circ)$$

$$\therefore z = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

Rpta.: A

Resolución 59: Recordando la forma exponencial de un complejo z :

$$z = |z| e^{i\theta} \quad \dots\dots(1)$$

$$\theta \in \mathbb{R} = \arg(z)$$

Nótese que: $z = 5^i = e^{\ln 5^i}$

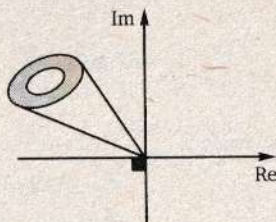
$$z = e^{i \ln(5)} \quad \dots\dots(2)$$

De (1) y (2) tenemos: $\theta = \ln(5)$

$$\therefore \arg(z) = \ln(5)$$

Rpta.: C

Resolución 60: Según la teoría z y $\bar{z}$ tienen simetría respecto al eje real, así como z y z_{op} lo tienen con respecto al polo (origen). Finalmente el lugar geométrico de $\bar{z}_{op}$ viene dado por



Rpta.: B

Resolución 61: Por condición:

$$u = \frac{z}{w}$$

$$\arg(u) = \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) \quad \dots\dots(1)$$

Por dato:

$$z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow \arg(z) = \frac{5\pi}{4}$$

Asimismo:

$$\arg(u) = \frac{\pi}{6}$$

Ahora en (1):

$$\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{4} - \arg(w)$$

$$\arg(w) = \frac{13\pi}{12}$$

Finalmente:

$$E = \arg(w)$$

$$E = \arg(w) = \frac{13\pi}{12} = \pi + \frac{\pi}{12}$$

$$\therefore E = -\arg(w) = -\frac{13\pi}{12}$$

Rpta.: B

Resolución 62: Hallemos el número de soluciones de la siguiente ecuación:

$$z^2 + \bar{z} = 0$$

I. Fácilmente reconocemos que $z = 0$ es una solución.

II. Si $z \neq 0 \Rightarrow z(z^2 + \bar{z}) = z \cdot 0$

$$z^3 + z \cdot \bar{z} = 0$$

$$z^3 + |z|^2 = 0$$

$$z^3 = -|z|^2$$

$$z = \sqrt[3]{-|z|^2}$$

De aquí obtenemos 3 soluciones.

$\therefore$ De (I) y (II) decimos que $z^2 + \bar{z} = 0$ tiene en total 4 soluciones

Rpta.: D

Resolución 63: Por condiciones:

$$z = k + 2ki$$

$$z^2 = -3k^2 + 4k^2i$$

$$z^4 = -7k^4 - 24k^4i$$

Por condición:

$$-24k^4 = 3k$$

$$k^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Finalmente:

$$|z| = \sqrt{k^2 + (2k)^2}$$

$$|z| = \sqrt{5k^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\therefore |z| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Rpta.: E

Resolución 64: Se tiene:

$$z = 1 - i + i^2 - i^3 + i^4 - i^5 + \dots + 2011 \text{ términos}$$

$$z = 1 + (-i) + (-i)^2 + (-i)^3 + (-i)^4 + (-i)^5 + \dots + (-i)^{2010}$$

$$z = \frac{1 - (-i)^{2010}}{1 - (-1)} = \frac{1 + i^{2010}}{1 + i} = \frac{1 + i^{4k+3}}{1 + i}$$

$$z = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)(i)}{(1 + i)(i)} = \frac{(1 - i)i}{i - 1} = -\frac{(1 - i)i}{1 - i} \Rightarrow z = -i$$

$$\therefore \operatorname{Re}(z) = 0$$

Rpta.: B

Resolución 65:

Se tiene:

$$z = 1 + e^{i(2\sqrt{\pi})}$$

Por Euler:

$$z = [1 + \cos(2\sqrt{\pi})] + i \sin(2\sqrt{\pi})$$

$$|z| = \sqrt{[1 + \cos(2\sqrt{\pi})]^2 + [\sin(2\sqrt{\pi})]^2}$$

$$|z| = \sqrt{2 + 2\cos(2\sqrt{\pi})} = \sqrt{2[1 + \cos(2\sqrt{\pi})]}$$

$$|z| = \sqrt{2[2\cos^2(\sqrt{\pi})]} = \sqrt{4\cos^2(\pi)}$$

$$\therefore |z| = 2\cos(\sqrt{\pi})$$

Rpta.: B

Resolución 66:

Por dato:

$$\arg(z^2) = \pi \Rightarrow \arg(\sqrt{z}) = \frac{\pi}{4}$$

Con lo cual tenemos: $\operatorname{Re}(\sqrt{z}) = \operatorname{Im}(\sqrt{z})$

Por condición se tiene:

$$2\operatorname{Re}(\sqrt{z}) + 3\operatorname{Im}(\sqrt{z}) = 25$$

$$2\operatorname{Re}(\sqrt{z}) + 3\operatorname{Re}(\sqrt{z}) = 25$$

$$5\operatorname{Re}(\sqrt{z}) = 25$$

$$\operatorname{Re}(\sqrt{z}) = 5$$

Ahora se plantea:

$$\sqrt{z} = 5 + 5i$$

$$z = (5 + 5i)^2$$

$$z = 25 + 50i - 25$$

$$\therefore z = 50i$$

Rpta.: D

Resolución 67:

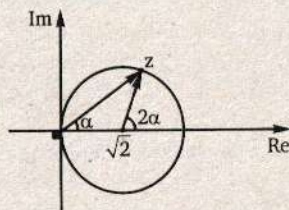
Se pide calcular:

$$E = \frac{\arg(z - \sqrt{2})}{\arg(z)}$$

Por condición:

$$|z - \sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

En el plano complejo:



Observa que si: $\arg(z) = \alpha \Rightarrow \arg(z - \sqrt{2}) = 2\alpha$

Finalmente tenemos: $E = \frac{2\alpha}{\alpha}$

$$\therefore E = 2$$

Rpta.: D

Resolución 68: En cada proposición:

$$I. \quad 1 + \sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow (1 + \sqrt{3}i)^n = 2^n \operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$1 - \sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow (1 - \sqrt{3}i)^n = 2^n \operatorname{cis}\left(-\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$\text{Ahora:} \quad (1 + \sqrt{3}i)^n + (1 - \sqrt{3}i)^n = 2^n \left[\operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \operatorname{cis}\left(-\frac{n\pi}{3}\right) \right]$$

$$(1 + \sqrt{3}i)^n + (1 - \sqrt{3}i)^n = 2^n \left[2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right]$$

$$(1 + \sqrt{3}i)^n + (1 - \sqrt{3}i)^n = 2^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

$\Rightarrow \arg\{(1 + \sqrt{3}i)^n + (1 - \sqrt{3}i)^n\}$ depende del valor que asuma n .

Por tanto la proposición es falsa (F).

$$II. \quad e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$$

$$z = \sqrt{i} = \sqrt{e^{\frac{\pi}{2}i}} = e^{\frac{\pi i}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\text{Ahora:} \quad e^{\sqrt{i}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot e^{\frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

$$e^{\sqrt{i}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right]$$

$$e^{\sqrt{i}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(e^{\sqrt{i}}) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

La proposición es verdadera (V).

$$III. \quad i = e^{\frac{\pi}{2}i} \rightarrow i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \operatorname{Im}(i^i) = 0$$

La proposición es falsa (F).

$\therefore$ La combinación correcta es: FVF

Rpta.: E

NÚMEROS COMPLEJOS

Resolución 69: Con el auxilio del gráfico tenemos: $|z_3| = 6$ Por condición: $|z_1| = 2|\bar{z}_2| = 3|z_3|$ Ahora tenemos: $|z_1| = 18 \wedge |\bar{z}_2| = |z_2| = 9$ En forma polar: $z_1 = |z_1| \operatorname{cis}(50^\circ)$

$$\bar{z}_2 = |z_2| \operatorname{cis}(200^\circ) \rightarrow z_2 = |z_2| \operatorname{cis}(-200^\circ)$$

$$z_3 = |z_3| \operatorname{cis}(-30^\circ)$$

En la expresión pedida:

$$z = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$$

$$z = \frac{|z_1| |z_2| \operatorname{cis}(50^\circ) \cdot \operatorname{cis}(-200^\circ)}{|z_3| \operatorname{cis}(-30^\circ)}$$

$$z = \frac{|z_1| |z_2|}{|z_3|} \operatorname{cis}(-120^\circ)$$

$$z = \frac{18 \cdot 9}{6} [\cos(-120^\circ) + i \operatorname{sen}(-120^\circ)]$$

$$z = 3 \cdot 9 [\cos(120^\circ) + i \operatorname{sen}(120^\circ)]$$

$$z = 27 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$$

$$\therefore z = -\frac{27}{2} (1 + \sqrt{3} i)$$

Rpta.: D**Resolución 70:** Se pide:

$$\operatorname{Re}(z \bar{w})$$

Sean:

$$z = x + yi \wedge w = a + bi$$

Condición:

$$|z + w| = |z - w|$$

$$|(x + a) + (y + b)i| = |(x - a) + (y - b)i|$$

$$\sqrt{(x + a)^2 + (y + b)^2} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

$$\underbrace{(x + a)^2 - (x - a)^2}_{4ax} + \underbrace{(y + b)^2 - (y - b)^2}_{4by} = 0$$

$$4ax + 4by = 0$$

$$ax + by = 0 \quad \dots\dots(1)$$

Se plantea:

$$z \cdot \bar{w} = (x + yi)(a - bi)$$

$$z \cdot \bar{w} = (ax + by) + (ay - bx)i \quad \dots\dots(2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$z \cdot \bar{w} = 0 + (ay - bx)i$$

$$\therefore \operatorname{Re}(z \bar{w}) = 0$$

Rpta.: A

Resolución 71: En cada igualdad:

$$I. e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow e^{i(e^{i\theta})} = e^{i[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]}$$

$$e^{i(e^{i\theta})} = e^{-\sin(\theta) + i\cos(\theta)} = e^{-\sin(\theta)} \cdot e^{i\cos(\theta)}$$

$$\Rightarrow \arg(e^{i(e^{i\theta})}) = \cos(\theta)$$

Por tanto la igualdad es verdadera (V).

$$II. z = x + yi \rightarrow \bar{z} = x - yi$$

$$\Rightarrow -z + \bar{z} = -2yi$$

Es evidente que $\arg(-z + \bar{z}) \neq \pi$ rad,

luego la igualdad propuesta es falsa (F)

$$III. \sqrt{-x} = i\sqrt{x} \text{ es una igualdad falsa, pues falla si } x < 0.$$

Además siendo $x > 0$: $\sqrt{-x} = \pm i\sqrt{x}$

$\therefore$ La combinación correcta es VFF

Rpta.: D

Resolución 72: Se pide calcular:

$$E = \left(1 - \frac{x}{m^3}\right) \left(1 + \frac{y}{n^3}\right)$$

$$E = \frac{(m^3 - x)(n^3 + y)}{m^3 n^3}$$

Por condición tenemos:

$$x + yi = (m + ni)^3$$

$$x + yi = (m^3 - 3mn^2) + (3m^2n - n^3) i$$

Ahora reconocemos que:

$$x = m^3 - 3mn^2 \Leftrightarrow 3mn^2 = m^3 - x$$

$$y = 3m^2n - n^3 \Leftrightarrow 3m^2n = n^3 + y$$

Finalmente en (1) tenemos:

$$E = \frac{(3mn^2)(3m^2n)}{m^3 n^3}$$

$$E = \frac{9m^3 n^3}{m^3 n^3}$$

$$\therefore E = 9$$

Rpta.: B

Resolución 73: Sea: $z = x + yi$; luego con las condiciones:

$$\frac{|z - 12|}{|z - 8i|} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 3|z - 12| = 5|z - 8i|$$

Ahora tenemos: $3\sqrt{(x - 12)^2 + y^2} = 5\sqrt{x^2 + (y - 8)^2}$

$$9(x - 12)^2 + 9y^2 = 25x^2 + 25(y - 8)^2$$

$$2x^2 + 2y^2 + 27x - 50y + 38 = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$\frac{|z - 4|}{|z - 8|} = 1 \Rightarrow |z - 4| = |z - 8|$$

Ahora tenemos: $\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = \sqrt{(x - 8)^2 + y^2}$

$$(x - 4)^2 + y^2 = (x - 8)^2 + y^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 - 16x + 64 + y^2$$

$$8x = 48$$

$$x = 6 \quad \dots\dots(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$72 + 2y^2 + 162 - 50y + 38 = 0$$

$$2y^2 - 50y + 272 = 0$$

$$y^2 - 25y + 136 = 0$$

$$(y - 17)(y - 8) = 0$$

De donde obtenemos que:

$$y = 17 \vee y = 8$$

Por condición: $|z| \leq 10$, luego:

$$x = 6 \wedge y = 8$$

$$\therefore z = 6 + 8i$$

Rpta.: D

Resolución 74: Observa que:

$$1 - \sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$(1 - \sqrt{3}i)^4 = 16 \operatorname{cis}\left(\frac{20\pi}{3}\right)$$

Por condición:

$$16 \operatorname{cis}\left(\frac{20\pi}{3}\right) + z = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 16 \operatorname{cis}\left(\frac{20\pi}{3}\right)$$

$$z = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 16 \operatorname{cis}\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 16 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z = -12 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z = -12 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$z = -12 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$\therefore z = 6 - 6\sqrt{3}i$$

Rpta.: C**Resolución 75:** Se pide $|z_1|$, donde: $z_1 = z - \frac{3}{4}i$

$$z_1 = \frac{i-k}{1+2ki} - \frac{3i}{4}$$

$$z_1 = \frac{4i - 4k - 3i + 6k}{4(1+2ki)}$$

$$z_1 = \frac{2k+i}{4(1+2ki)}$$

$$|z_1| = \frac{1}{4} \cdot \frac{|2k+i|}{|1+2ki|}$$

$$|z| = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{4k^2+1}}{\sqrt{1+4k^2}}$$

$$|z_1| = \frac{1}{4} (1)$$

$$\therefore |z| = \frac{1}{4}$$

Rpta.: A

Resolución 76: En cada proposición:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad A &= 1 + i + i^3 + i^5 + i^7 + \dots + i^{89} + i^{91} \\ A &= 1 + i(\underbrace{1 + i^2 + i^4 + i^6 + \dots + i^{88}}_0 + \underbrace{i^{90}}_0) \\ A &= 1 + i \cdot 0 \Rightarrow A = 1 \end{aligned}$$

La proposición es falsa (F).

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad M &= (1 + \sqrt{-1})^{n+2} (1 - \sqrt{-1})^{n-2} \\ M &= (1 + i)^{n+2} (1 - i)^{n-2} \\ M &= (1 + i)^n (1 + i)^2 \cdot \frac{(1 - i)^n}{(1 - i)^2} \\ M &= [(1 + i)(1 - i)]^n \cdot \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)^2} \\ M &= [1^2 - i^2]^n \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^2 = 2^n \cdot i^2 \\ \Rightarrow M &= -2^n \end{aligned}$$

La proposición es falsa (F).

III. Observa que cada término es de la forma:

$$\frac{a + bi}{b - ai} = i$$

$$\begin{aligned} \text{Ahora:} \quad S &= i + i + i + \dots \dots \dots \text{"n" términos} \\ S &= ni \end{aligned}$$

La proposición es verdadera (V).

∴ La combinación correcta es FFV

Rpta.: D

Resolución 77: Se tiene:

$$\begin{aligned} z &= \frac{4 \operatorname{cis}(65^\circ)}{3 \operatorname{cis}(20^\circ)} = \frac{4}{3} \operatorname{cis}(65^\circ - 20^\circ) \\ z &= \frac{4}{3} \operatorname{cis}(45^\circ) = \frac{4}{3} \cos(45^\circ) + \frac{4}{3} \operatorname{sen}(45^\circ) i \\ \therefore z &= \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} i \end{aligned}$$

Rpta.: A

Resolución 78: Se tiene:

$$\begin{aligned} \bullet z_1 &= (2+i)(1) = 2+i \\ \bullet z_2 &= (-1+3i)(1-2i)(i) \end{aligned}$$

$$z_2 = (5+5i)i = -5+5i$$

Sea:

$$z = \frac{z_1}{z_1 + z_2} = \frac{2+i}{-3+6i}$$

$$z = \frac{2+i}{-3(1-2i)} = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2+i}{1-2i}\right)$$

$$z = \left(-\frac{1}{3}\right)(i) \Rightarrow z = -\frac{1}{3}i$$

$\therefore z$ se encuentra en el eje imaginario.

Rpta.: E**Resolución 79:** Por condición:

$$\frac{3b + (a+6)i}{3-bi} = ri; r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$3b + (a+6)i = br + 3ri$$

Se cumple que:

$$3b = br \Rightarrow r = 3$$

También que:

$$a + 6 = 9$$

$$\therefore a = 3$$

Rpta.: A**Resolución 80:** Se tiene:

$$E = \frac{(1+i)^9}{1+i} + \frac{(1-i)^9}{1+i^5} + \frac{(1+i)^8}{1+i^8} + \frac{(1-i)^8}{1-i^{13}}$$

$$E = (1+i)^8 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)(1-i)^8 + \frac{(1+i)^8}{2} + \frac{(1-i)^8}{1-i}$$

$$E = (2i)^4 + (-i)(-2i)^4 + \frac{(2i)^4}{2} + (1-i)^7$$

$$E = 16 + (-i)(16) + \frac{16}{2} + (1-i)(-2)^3$$

$$E = 16 - 16i + 8 + (1-i)(8i)$$

$$E = 24 - 16i + 8i + 8$$

$$\therefore E = 32 - 8i$$

Rpta.: C

Resolución 81: Se tiene:

$$E = \frac{(2+3i)(-1+2i)}{3-i} + \frac{(1+\sqrt{3}i)^5 i}{2(\sqrt{3}+i)^4}$$

$$E = \frac{(2+3i)(-1-2i)}{3+i} + \frac{(1+\sqrt{3}i)i}{2} \cdot \frac{(1+\sqrt{3}i)^4}{(\sqrt{3}+i)^4}$$

$$E = \frac{-(2+3i)(1+2i)}{3+i} + \frac{(1+\sqrt{3}i)i}{2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} \right)^4$$

$$E = \frac{-4+7i}{3+i} + \frac{(1+\sqrt{3}i)i}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2} \right)^4$$

$$E = \frac{4-7i}{3+i} + \left(\frac{i-\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{2+2\sqrt{3}i}{4} \right)^2$$

$$E = \frac{(4-7i)(3-i)}{10} + \left(\frac{i-\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^2$$

$$E = \frac{5-25i}{10} + \left(\frac{i-\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} \right)$$

$$E = \frac{1-5i}{2} + \left(\frac{i-\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i - i$$

$$\therefore E = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$$

Rpta.: C

Resolución 82: Veamos los datos:

$$\bullet z_1 = \frac{(1+i)^4 + (1-i)^4}{2+i} = \frac{(2i)^2 + (-2i)^2}{2+i} = \frac{-4-4}{2+i}$$

$$z_1 = \frac{-8}{2+i} = \frac{-8(2-i)}{5} \Rightarrow z_1 = -\frac{16}{5} + \frac{8i}{5}; |z_1| = \frac{8}{5}\sqrt{5}$$

$$\bullet z_2 = \frac{4i^{23} - i}{1+2i} = \frac{-4i - i}{1+2i} = \frac{-5i}{1+2i} = \frac{-5i(1-2i)}{5}$$

$$z_2 = \frac{-i(1-2i)}{1} \Rightarrow z_2 = -2-i; |z_2| = \sqrt{5}$$

$$\bullet z_3 = i^{83} + (1-i)^6 = i^3 + [(1-i)^2]^3 = -i + [-2i]^3$$

$$z_3 = -i - 8i^3 \Rightarrow z_3 = 7i$$

Se pide:

$$z = 5\bar{z}_1 + 2z_2^2 + z_3 + \frac{5}{4}|z_1||z_2|$$

$$z = 5\left(-\frac{16}{5} - \frac{8i}{5}\right) + 2(-2-i)^2 + 7i + \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5} \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$$

$$z = -16 - 8i + 2(3+4i) + 7i + 10 = -6 - i + 6 + 8i$$

$$\therefore z = 7i$$

Rpta.: C

Resolución 83: Se plantea:

$$|w| = \frac{|z|^{e^{i(x^2+5|x|+2)}} |3+4i| |\sqrt{3}+i|}{|-1+\sqrt{3}i|}$$

$$|w| = \frac{\sqrt{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 2}{2}$$

$$\therefore |w| = 5\sqrt{2}$$

Rpta.: D**Resolución 84:** Del enunciado:

$$z_1 = x + yi$$

$$z_2 = (1-x) - yi$$

$$\bullet \left| \frac{x+yi}{(1-x)-yi} \right| = 1 \Rightarrow |x+yi| = |(1-x)-yi|$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1-x)^2+y^2}$$

$$x^2+y^2 = 1-2x+x^2+y^2$$

$$2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \frac{x+yi}{1-x-yi} = \frac{\frac{1}{2}+yi}{\frac{1}{2}-yi} = \frac{\left(\frac{1}{2}+yi\right)^2}{\frac{1}{4}+y^2} + \frac{\frac{1}{4}-y^2}{\frac{1}{4}+y^2} + \frac{yi}{\frac{1}{4}+y^2}$$

Por condición: $\frac{1}{4} - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \vee y = -\frac{1}{2}$

Finalmente: $z = \frac{1}{2}(1+i) \vee z = \frac{1}{2}(1-i)$

$$\therefore z = \frac{1}{2}(1-i)$$

Rpta.: C

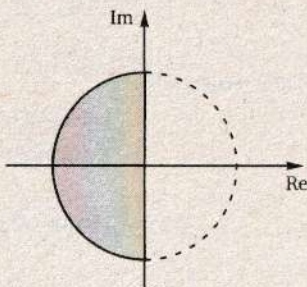
Resolución 85: Sea $z = x + yi$, luego:

$$\begin{aligned} \bullet \quad e^z &= e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} \\ |e^z| &= |e^x \cdot e^{yi}| = |e^x| \cdot |e^{yi}| \\ |e^z| &= e^x \cdot 1 = e^x \end{aligned}$$

Por condición:

$$\begin{aligned} e^x \leq 1 &\Leftrightarrow e^x \leq e^0 \\ x &\leq 0 \quad \dots\dots(1) \\ |z| \leq 1 &\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ x^2 + y^2 &\leq 1 \quad \dots\dots(2) \end{aligned}$$

De (1) y (2):



$$\therefore \text{Área} = \frac{\pi}{2} u^2$$

Rpta.: C

Resolución 86: Datos:

$$\begin{aligned} x &= m + n \quad \Rightarrow \quad x^2 = m^2 + n^2 + 2mn \\ y &= mw + nw^2 \Rightarrow y^2 = m^2w^2 + n^2w^2 + 2mnw \\ z &= mw^2 + nw \Rightarrow z^2 = m^2w^2 + n^2w^2 + 2mnw \end{aligned}$$

Observa que:

$$\begin{aligned} x + y + z &= m \underbrace{(1 + w + w^2)}_0 + n \underbrace{(1 + w + w^2)}_0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 &= 6mn \end{aligned}$$

Se pide calcular:

$$A = x^4 + y^4 + z^4$$

Como $x + y + z = 0$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\ A &= \frac{1}{2}(6mn)^2 \\ A &= \frac{1}{2}(36m^2n^2) \end{aligned}$$

$$\therefore A = 18m^2n^2$$

Rpta.: D

Resolución 87: La ecuación es:

$$w^{100} - 1 = 0$$

$$w^{100} = 1$$

$$w^{100} = \text{cis}(0^\circ)$$

$$w = \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{100}\right)$$

Por condición tenemos:

$$\frac{\pi}{25} < \frac{2k\pi}{100} < \frac{4\pi}{25}$$

$$1 < \frac{k}{2} < 4$$

$$2 < k < 8$$

Ahora reconocemos que:

$$k = 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$\therefore$ Existen cinco raíces complejas.

Rpta.: C

Resolución 88:

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2} \text{cis}\left[\frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{3}\right]$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2} \text{cis}\left[\frac{8k\pi + \pi}{12}\right]$$

$$\therefore \text{Re}(\sqrt[3]{z}) = \sqrt[3]{2} \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$$

Rpta.: E

Resolución 89: Se tiene:

$$z = (1 + i)e^{i\omega t} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\omega t}$$

$$z = \sqrt{2} e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + i\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \text{Re}(z) = \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Rpta.: A

Resolución 90:

$$z = 4\sqrt{3} - 4i = 4(\sqrt{3} - i) = 8 \operatorname{cis} \left(\frac{11\pi}{16} \right)$$

$$\sqrt[3]{z} = 2 \operatorname{cis} \left[\frac{2k\pi + \frac{11\pi}{6}}{3} \right]$$

$$\sqrt[3]{z} = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{12k\pi + 11\pi}{18} \right)$$

$$1^{\text{era}} \text{ raíz: } k = 0; \quad \sqrt[3]{z} = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{11\pi}{18} \right)$$

$$2^{\text{da}} \text{ raíz: } k = 1; \quad \sqrt[3]{z} = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{23\pi}{18} \right)$$

$$3^{\text{era}} \text{ raíz: } k = 2; \quad \sqrt[3]{z} = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{35\pi}{18} \right)$$

Rpta.: C

Resolución 91:

Por condición:

$$z_1 = \sqrt{z} \Rightarrow z_1^2 = z$$

$$z_2 = \sqrt{z} \Rightarrow z_2^2 = z$$

Ahora se plantea:

$$z_1^2 = z_2^2 \Leftrightarrow z_1^2 - z_2^2 = 0$$

$$(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = 0$$

Como $z_1 \neq z_2$; tenemos:

$$z_1 + z_2 = 0$$

$$\therefore (z_1 + z_2)^3 = 0$$

Rpta.: C

Resolución 92:

La ecuación es:

$$(z^3 - iz^2) - (1 + 2i)(z^2 - iz) + 2(iz + 1) = 0$$

$$(z^3 - iz^2) - (1 + 2i)(z^2 - iz) + 2(iz - i^2) = 0$$

$$z^2(z - i) - (1 + 2i)(z - i)z + 2i(z - i) = 0$$

$$(z - i)[z^2 - (1 + 2i)z + 2i] = 0$$

$$(z - i)(z - 2i)(z - 1) = 0$$

De donde:

$$z = i; \quad z = 2i \quad \vee \quad z = 1$$

$$\Rightarrow |z_1| + |z_2| + |z_3| = 1 + 2 + 1$$

$$\therefore |z_1| + |z_2| + |z_3| = 4$$

Rpta.: B

Resolución 93: Supongamos que: $z = \sqrt[3]{-2i} + \sqrt[3]{-2i} + \sqrt[3]{-2i} + \dots$

Ahora: $z = \sqrt[3]{-2i} + z$

$$z^3 = -2i + z \Leftrightarrow z^3 - z = -2i$$

$$z^3 - z = -i - i \Leftrightarrow z^3 - z = i^3 - i$$

De donde un valor de z es:

$$\therefore z = i$$

Rpta.: D

Resolución 94: El complejo dado es:

$$z^{15} = i = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z_{k+1} = \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{15}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{4k\pi + \pi}{30}\right)$$

Observa que: $|z_{k+1}| = 1; \forall k \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 14\} \dots (1)$

I. Se plantea: $\frac{\pi}{2} < \frac{4k\pi + \pi}{30} < \pi$

$$15 < 4k + 1 < 30$$

$$\frac{14}{4} < k < \frac{29}{4}$$

$$3,5 < k < 7,25$$

$$\Rightarrow K = 4; 5; 6; 7$$

En el segundo cuadrante la ecuación presenta cuatro raíces, por tanto la afirmación es falsa (F).

II. Si $z_1; z_2; \dots$ y z_{15} son las raíces de la ecuación $z^{15} - i = 0$; se cumple que:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_{15} = 0$$

La afirmación es verdadera (V).

III. De (1): $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \dots = |z_{15}| = 1$

$$\Rightarrow |z_1| + |z_2| + |z_3| + \dots + |z_{15}| = 15$$

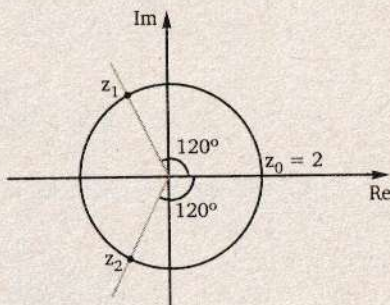
La afirmación es verdadera (V).

$\therefore$ La combinación correcta es FVV

Rpta.: D

Resolución 95: Del enunciado: $P(z_0) = P(z_1) = P(z_2) = 0$

Se sabe que: $L = \theta \cdot r$
 $2\pi r = 4\pi$
 $r = 2$



Ahora tenemos: $|z_0| = |z_1| = |z_2| = 2$

- $z_0 = 2 \operatorname{cis}(0^\circ) = 2$
- $z_1 = 2 \operatorname{cis}(120^\circ) = -1 + \sqrt{3}i$
- $z_2 = 2 \operatorname{cis}(240^\circ) = -1 - \sqrt{3}i$

Se sabe que: $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Con lo cual: $z_0 = 2; z_1 = 2w$ y $z_2 = 2w^2$

El polinomio buscado es:

$$P(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)$$

$$P(z) = (z - 2)(z - 2w)(z - 2w^2)$$

$$P(z) = z^3 - 2(1 + w + w^2)z^2 + (4w + 4w^2 + 4w^3)z - 8w^3$$

Como $w^3 = 1$: $P(z) = z^3 - 2(1 + w + w^2)z^2 + (4w + 4w^2 + 4w^3)z - 8$

Asimismo: $1 + w + w^2 = 0$

$$P(z) = z^3 - 0 + 0 - 8$$

$$\therefore P(z) = z^3 - 8$$

Rpta.: B

Resolución 96: La ecuación es: $(z+1)^n = (z-1)^n$

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$$

$$\frac{z+1}{z-1} = \sqrt[n]{1}$$

$$\frac{z+1}{z-1} = \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Por propiedad de las proporciones:

$$\frac{2z}{2} = \frac{\text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1}{\text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - 1} ; k \neq 0$$

$$\therefore z = \frac{-\text{icos}\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)} ; k = 1; 2; \dots; n-1$$

Rpta.: B

Resolución 97: Se tiene:

$$P(z) = (2-\alpha)z^3 + (4+2i)z + 6$$

$$P(1+i) = (2-\alpha)(1+i)^3 + (4+2i)(1+i) + 6$$

$$P(1+i) = (2-\alpha)(2i-2) + (4+2i)(1+i) + 6$$

$$P(1+i) = (4-2\alpha)i - 4 + 2\alpha + 2 + 6i + 6$$

$$P(1+i) = (4+2\alpha) + (10-2\alpha)i$$

Por condición: $4+2\alpha = 0$

$$\therefore \alpha = -2$$

Rpta.: D

Resolución 98: La ecuación es: $z^2 - (5-i)z + 12 - 5i = 0$

Por aspa simple tenemos:

$$[z - (3 + 2i)][z - (2 - 3i)] = 0$$

Por condición se asume:

$$z_1 = 3 + 2i \wedge z_2 = 2 - 3i$$

Finalmente se plantea:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{2 + 3i}$$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = i$$

Rpta.: D

Resolución 99: Se tiene:

$$(z^2 + 2iz - 1)^2 = 16z^4$$

$$[(z + i)^2]^2 - 16z^4 = 0$$

$$(z + i)^4 - (2z)^4 = 0$$

$$[(z + i)^2 + (2z)^2][(z + i)^2 - (2z)^2] = 0$$

$$(5z^2 + 2iz - 1)(3z + i)(i - z) = 0$$

$$\bullet \quad 5z^2 + 2iz - 1 = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{-2i \pm \sqrt{16}}{10}$$

$$z = \frac{-2i \pm 4}{10}$$

$$z = \frac{-i \pm 2}{5} \begin{cases} z_1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \\ z_2 = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \end{cases}$$

$$\bullet \quad 3z + i = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{3}i$$

$$\bullet \quad i - z = 0 \Rightarrow z = i$$

$$\therefore z = i$$

Rpta.: D

Resolución 100: Sea:

$$z = x + yi$$

Por condición:

$$y > 0; x, y \in \mathbb{Z}$$

$$|z-1| \geq 1 \wedge |z+1| \geq 1 \wedge |z| \leq 2$$

$$(x-1)^2 + y^2 \geq 1 \wedge (x+1)^2 + y^2 \geq 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 4 \dots (1)$$

Para el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} (x+1)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{array} \right\} x \geq -2$$

Para el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} (x-1)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{array} \right\} x \leq 2$$

Observa que:

$$-2 \leq x \leq 2$$

Como $x \in \mathbb{Z}$:

$$x = -2; -1; 0; 1; 2$$

De (1):

$$y^2 \geq 1 - (x-1)^2 \wedge y^2 \geq 1 - (x+1)^2 \wedge y^2 \leq 4 - x^2$$

Si $x = -2$:

$$\underbrace{y^2 \geq -8 \wedge y^2 \geq 0 \wedge y^2 \leq 0}_{y = 0; \text{ pero } y > 0. \text{ Luego no existe solución}}$$

Si $x = -1$:

$$\underbrace{y^2 \geq -3 \wedge y^2 \geq 1 \wedge y^2 \leq 3}_{\substack{1 \leq y \leq \sqrt{3} \\ y = 1}}$$

$$\Rightarrow z = -1 + i$$

Si $x = 0$:

$$\underbrace{y^2 \geq 0 \wedge y^2 \geq 0 \wedge y^2 \leq 4}_{\substack{0 \leq y \leq 2 \\ y = 1 \vee y = 2}}$$

$$\Rightarrow z = i; z = 2i$$

Si $x = 1$:

$$\underbrace{y^2 \geq 1 \wedge y^2 \geq -3 \wedge y^2 \leq 3}_{\substack{1 \leq y \leq \sqrt{3} \\ y = 1}}$$

$$\Rightarrow z = 1 + i$$

Si $x = 2$:

$$y^2 \geq 0 \wedge y^2 \geq -8 \wedge y^2 \leq 0$$

$$y = 0; \text{ pero } y > 0. \text{ Luego no existe solución.}$$

Como existen 4 números complejos z que verifican el sistema, se afirma que:

$$\therefore n(A) = 4$$

Rpta.: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular $\arg(z)$; sabiendo que:

$$\left| \frac{z+1}{z-3} \right| = 1; |z+2+3i| = 5; \operatorname{Im}(z) > 0$$

- A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{2}$
D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{4}$

2. Si: $z = -\operatorname{sen} 20^\circ - i \cos 20^\circ$. Determine $\arg(z)$

- A) 190° B) 250° C) 240°
D) 340° E) 200°

3. Siendo 1, w y w^2 las 3 raíces cúbicas de la unidad, simplificar:

$$\frac{1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{25}}{(1 - w^5 + w^{10} - w^{15} + \dots + w^{220})^{-1}}$$

- A) 1 B) w C) $-w$
D) $2w$ E) -1

4. Sabiendo que: $\arg(z) = 60^\circ$ y $|z| = 1$

Calcular: $\arg(z^2 + z)$

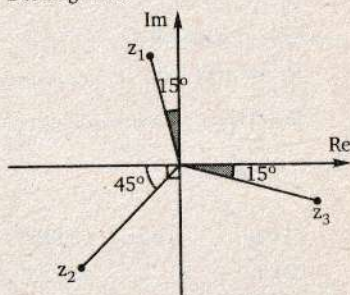
- A) 30° B) 60° C) 120°
D) 45° E) 90°

5. Determinar el resto de dividir:

$$\frac{(\cos \theta + x \operatorname{sen} \theta)^n - \cos(n\theta) - x \operatorname{sen}(n\theta)}{x^2 + 1}$$

- A) 1 B) 0 C) 2
D) i E) $2+i$

6. Del diagrama:



Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. $\arg(z_1 \cdot z_2) = 340^\circ$
II. $\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2) > 0$
III. $\arg(z_3) - \arg(z_1) = 240^\circ$

- A) FVV B) FVF C) VVV
D) FFF E) FFV

7. Calcular el argumento de $z_1 \cdot z_2$; si:

$$z_1 = 1 - \cos 19^\circ + i \operatorname{sen} 19^\circ$$

$$z_2 = 1 - \cos 59^\circ + i \operatorname{sen} 59^\circ$$

- A) 121° B) 141° C) 161°
D) 139° E) 159°

8. Si $W \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\sqrt{3} + (1+2W)i = 0;$$

Calcular W^{10}

- A) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B) $-1 + \sqrt{3}i$
C) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
D) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ E) $1+i$

9. Proporcionar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
- I. $|e^{ni} + e^{-ni}| = 2$
 II. $|zi + 1| = |z - i|$
 III. El lugar geométrico de $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ es una recta.
- A) VVV B) VVF C) FVV
 D) FFV E) FFF
10. Si: $w = -2 + 2\sqrt{3}i$; determine el complejo z ; tal que: $2|z| = |w|$;
 $\arg(z) - \arg(w) = \frac{\pi}{2}$
- A) $-\sqrt{3} + i$ B) $-\sqrt{3} - i$ C) $1 - \sqrt{3}i$
 D) $\sqrt{3} + i$ E) $\pm\sqrt{3}i$
11. El número de valores enteros y positivos de "n" de dos cifras que hacen que la expresión:
 $C_0^n + C_1^n w + C_2^n w^2 + C_3^n w^3 + \dots + C_n^n w^n$
 se reduzca a la unidad es:
- A) 17 B) 14 C) 15
 D) 16 E) 13
12. Expresar en forma exponencial al siguiente complejo: $-8 + 8\sqrt{3}i$
- A) $32e^{\frac{4\pi}{3}i}$ B) $16e^{\frac{4\pi}{3}i}$ C) $8e^{\frac{2\pi}{3}i}$
 D) $16e^{\frac{2\pi}{3}i}$ E) $4e^{\frac{4\pi}{3}i}$
13. Determine el argumento de z ; si:
 $z = (1+i)^{7-i} \cdot (\sqrt{2})^{1-z}$
- A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{5\pi}{4}$
 D) $\frac{7\pi}{4}$ E) $\frac{9\pi}{4}$
14. El argumento principal de z ; donde:
 $z = 1 + \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$ es:
- A) 20° B) 80° C) 40°
 D) 5° E) 10°
15. Mostrar un valor de $(-i)^i$
- A) e^4 B) $e^{\frac{\pi}{6}}$ C) $e^{-\frac{\pi}{6}}$
 D) $e^{\frac{5\pi}{2}}$ E) $e^{\frac{3\pi}{2}}$
16. Calcular el valor mínimo de $(n!)!$ sabiendo que: $i^{(n+1)!} + i^{n!} = 0$
- A) 1 B) 2 C) 720
 D) 5040 E) 180
17. Simplificar:
 $\left(\frac{1 + \sec \theta + i \tan \theta}{1 + \sec \theta - i \tan \theta} \right)^n$; $\cos \theta \neq 0$
- A) $\cis \theta$ B) $\cis(n\theta)$ C) $n \cis \theta$
 D) $\cis(2n\theta)$ E) $2n \cis \theta$
18. Si a , b y c son números reales tales que:
 $\frac{a+bi}{1+ci}$ es imaginario puro.
 $\frac{c-ai}{b+i}$ es real.
 Calcular: $b^2 + a^{-2}c^2$
- A) 1 B) 3 C) 4
 D) 8 E) 2

19. Sean $z = 1 + \sqrt{3}i$. Si al unir los afijos de z ; $\bar{z}$ y z_{op} se forma un triángulo rectángulo. Determine el área exterior al triángulo e interior a la circunferencia circunscrita.

A) $(2\pi - \sqrt{3})u^2$ B) $(4\pi - 4\sqrt{3})u^2$
C) $(4\pi - 2\sqrt{3})u^2$
D) $(4\pi - \sqrt{3})u^2$ E) $(2\pi - 2\sqrt{3})u^2$

20. Si w es una de las raíces cúbicas de la unidad ($w \neq 1$). Calcular:

$$w^3 + w^4 + w^5 + \dots + w^{99} + w^{100}$$

A) 0 B) 1
C) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
D) -1 E) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

21. Determine el argumento de z ; donde:

$$z = \frac{(3-4i)^2(-3+3\sqrt{3}i)}{-\sqrt{5}-\sqrt{5}i}$$

A) 37° B) 53° C) 59°
D) 60° E) 67°

22. Luego de extraer la raíz cúbica a:

$$z = 8 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

el producto de todas sus raíces es:

A) $4 + 4\sqrt{3}i$ B) $4 - 4\sqrt{3}i$
C) $-4 + 4\sqrt{3}i$
D) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ E) $4 + 8\sqrt{3}i$

23. Si w es una de las raíces cúbicas de la unidad; calcular:

$$(1+w+2w^2)^{27} + (1+2w+w^2)^{27}$$

A) 2 B) 1 C) 0
D) $3w$ E) $2w$

24. Si $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$; $y \neq 0$ para que el número: $\frac{z}{1+z^2}$ sea real, el módulo z deberá ser:

A) 1 B) -1 C) 0
D) 2 E) 3

25. Reducir:

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}i}{2}\right)^5 + \left(\frac{-1-\sqrt{5}i}{2}\right)^5; i = \sqrt{-1}$$

A) -4,75 B) -6,5 C) -8,5
D) -3,25 E) -7,75

26. Si: $z = 2 + 3i$; calcular $\operatorname{Im}(w)$

$$w = \frac{z - \bar{z}}{3z + z^2}$$

A) 3 B) 2 C) $\frac{3}{221}$
D) $\frac{2}{221}$ E) $\frac{1}{21}$

27. Calcular: $\frac{x}{y}$ a partir de:

$$\sqrt{2+\sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{5}-2}i = \sqrt{x+yi}$$

A) 1 B) -1 C) 2
D) 3 E) 0,5

28. Calcular: $\frac{x+y}{x-y}$; si:

$$(1+i)^2 + (1+i)^4 + (1+i)^6 + (1+i)^8 = x+yi$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{3}$

29. ¿Para qué valores reales de "m" el cubo del número complejo: $n + i$ será un imaginario puro?

A) $\pm\sqrt{3}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $-\sqrt{3}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 C) 0 y $\sqrt{3}$
 D) 0 y $\pm\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$ y $\pm\frac{\sqrt{3}}{5}$

30. Simplificar: $\frac{[4 \operatorname{cis}(23^\circ)]^5 [8 \operatorname{cis}(12^\circ)]^2}{[2 \operatorname{cis}(15^\circ)]^7 [128 \operatorname{cis}(4^\circ)]}$

A) $2 + \sqrt{3}i$ B) $2\sqrt{3} + 2i$
 C) $\sqrt{3} - 2i$
 D) $2 + i$ E) i

31. Siendo 1, w y w^2 las tres raíces cúbicas de la unidad; simplificar:

$$\frac{(x+y+z)^3 + (x+wy+w^2z)^3 + (x+w^2y+wz)^3}{(x+y+z)(x+wy+w^2z)(x+w^2y+wz) + 9xyz}$$

A) -1 B) 1 C) 2
 D) -2 E) 3

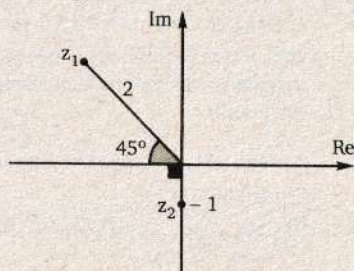
32. Dado el complejo: $z = \operatorname{sen} \theta + i \cos \theta$ tal que: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. $\arg(z) = \theta$
 II. $\arg(iz) = \pi - \theta$
 III. $\arg(-z^2) = 2(\pi - \theta)$

A) FVV B) VVV C) FFV
 D) VVF E) VFF

33. Del diagrama:



Si z_2 es el producto de multiplicar z_1 y

w. Calcular: $\frac{\operatorname{Re}(w) - \sqrt{2}}{\operatorname{Im}(w) + \sqrt{2}}$

A) $\frac{1}{2}$ B) -1 C) $-\frac{3}{5}$
 D) $\frac{2}{3}$ E) $-\frac{7}{3}$

34. Dada la ecuación:

$$z^2 + (a + bi)z + c + di = 0; \text{ donde:}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$ ¿En qué caso la ecuación admite dos raíces reales?

A) $a = b = 0; c^2 - 4d > 0$
 B) $b = c = 0; a^2 - 4d > 0$
 C) $abd = d^2 + b^2c; a^2 > 4d$
 D) $b = d = 0; a^2 - 4c > 0$
 E) $b = d = 0; a^2 - 4ac > 0$

35. Encontrar los complejos z ; tales que z^7 y $\frac{1}{z^2}$ sean conjugados. Luego determinar los valores numéricos del polinomio: $P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z$; para cada uno de los z obtenidos.

A) -1; 1; 4 y 0 B) sólo 1
 C) sólo 0
 D) sólo -1 E) sólo 4

36. Sea $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}$

Determine el argumento de w ; siendo:

$$w = z^2 + \bar{z}$$

A) $\frac{\theta}{2}$ B) 2θ C) $\frac{3\theta}{2}$

D) $\frac{\theta}{4}$ E) $\frac{5\theta}{8}$

37. Luego de resolver las ecuaciones:

I. $z^2 + 2iz = 5$

II. $(1+i)z^2 + 2 + 60i = (7+13i)z$

Mostrar el complejo que no es raíz de (I) ni (II)

A) $i-2$ B) $3+5i$ C) $7-2i$
D) $-i-2$ E) $-i+2$

38. Reducir:

$$\frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1-i}}}}$$

A) $-i$ B) $1+i$ C) 0
D) 1 E) i

39. Si $z, w \in \mathbb{C}$; reducir:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z+w}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{w}{z+w}\right)$$

A) 0 B) 1 C) -1
D) $0,5$ E) 2

40. Si $z, w \in \mathbb{C}$ determinar el menor valor de K tal que:

$$\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| \leq K$$

A) 4 B) 2 C) $\frac{1}{9}$

D) 1 E) $\frac{1}{2}$

41. Si los complejos:

$$z = (1+i)\cos\left(\frac{13\pi}{24}\right) + (1-i)\cos\left(\frac{25\pi}{24}\right)$$

$$w = (1+i)\cos\left(\frac{25\pi}{24}\right) + (1-i)\cos\left(\frac{37\pi}{24}\right)$$

son vértices consecutivos de un polígono regular de "n" lados centrado en el polo del plano cartesiano.

Determinar el valor de:

$$\frac{z^n + w^n}{\sqrt[n]{e^{19\pi i}}}$$

A) 4 B) 2 C) 8
D) 16 E) 3

42. Sabiendo que:

$$A = \{z+i \mid |z-1| \leq 2\}$$

$$B = \{z+3 \mid \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) \geq 7\}$$

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. $A \cap B = \emptyset$

II. $z = 2+2i \in B$

III. $z = i \in A$

A) VVV B) VVF C) VFV
D) FFF E) FVF

43. Determine usted la suma de todos los complejos que sean conjugados con su cubo.

A) 0 B) 1 C) $1+2i$
D) $2i$ E) i

44. Si: $z = \text{cis } \theta$; $z \in \mathbb{C}$; calcular la parte imaginaria de: $z^n + \frac{1}{z^n}$; $n \in \mathbb{Z}^+$

A) $2 \cos(n\theta)$ B) n C) 2
D) 1 E) 0

45. Mostrar el equivalente de:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-3} \cdot i^i \cdot e^{\frac{\pi}{2}}$$

A) 0 B) -1 C) $\sqrt{e}$
D) 1 E) $\sqrt{-1}$

46. Sean los complejos z_1, z_2, z_3 tales que:
 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$; $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$
Luego z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo:

A) Equilátero B) Rectángulo
C) Escaleno
D) Obtusángulo E) Isósceles

47. Si z es un complejo que verifica:
 $(4 - 2i)z - \frac{1+i}{1-i} = 2\sqrt{3} + 1 + (1 - \sqrt{3})i$
calcular: z^{30} .

A) 1 B) -1 C) 30
D) 2 E) -2

48. Sean los complejos z_1 y z_2 tales que:
 $|z_1| = |z_2| = 3$; $\arg(z_1) = \theta$; $\arg(z_2) = \alpha$.
Además: $\theta - \alpha = \pi$. Calcular:

$$|z_2 + iz_1|^2 + |z_1 + iz_2|^2$$

A) 0 B) 3 C) 36
D) 2 E) 12

49. La suma de dos números complejos es: $(-2 - 6i)$; la parte real de uno de ellos es: -4 y el cociente es imaginario puro. Determinar la diferencia de las partes imaginarias de los complejos.

A) 2 B) -6 C) -8
D) 16 E) 1

50. Sea: $P(z) = z^2 + 2z + a$; donde $\text{Im}(a) \neq 0$; si se verifica:

$$P(ai) = P(a) - i; i = \sqrt{-1}$$

Determinar: $P(2a)$

A) $5 - i$ B) $i - 5$ C) $\frac{i-5}{5}$
D) $\frac{i-2}{5}$ E) $\frac{i-5}{2}$

51. Luego de resolver:

$$z^5 - 1 = \frac{22 + 14i}{7 - 11i} + \frac{26 + 82i}{41 - 13i} + \frac{3 - 33i}{11 + i}$$

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Una raíz es: $\sqrt[10]{2} \text{ cis } (9^\circ)$
II. Una raíz es: $\sqrt[10]{2} \text{ cis } (160^\circ)$
III. Tienen una sola raíz en el tercer cuadrante.
IV. Uno de los vértices del pentágono regular que contiene a las raíces tiene argumento 297°

A) VVVV B) FVFF C) FVVV
D) VVFF E) VFFV

52. Si: $P(z) = z^2 + mz + n$; donde:
 $\{m, n\} \subset \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$ / $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ si $(i-1)$ es una raíz del polinomio $P(z)$.
Determinar: $P(i)$

A) 0 B) i C) -1
D) $1 + 2i$ E) $2 + i$

53. Reducir:

$$\frac{1+2i}{2-i} + \frac{3+4i}{4-3i} + \frac{5+6i}{6-5i} + \dots \quad 2010 \text{ términos}$$

- A) 2009 B) 2009i C) 2010
D) 2005i E) 2010i

54. Si el cuadrado de un número complejo es igual a la semisuma de su complejo conjugado y su complejo opuesto, luego este número complejo es tal que:

- A) Tiene parte real igual a 1.
B) No tiene parte real
C) El cuadrado de su parte real es igual al cuadrado de su parte imaginaria.
D) Puede ser cualquiera.
E) Faltan datos.

55. Dado un polinomio

$$P(x); P\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right) = 0. \text{ Donde:}$$

$$P(x) \equiv 3x^6 + (1+3i)x^5 + ix^4 + 12x^2 + 4(1+3i)x + 4i$$

Luego de factorizarlo se observa que el número de factores primos de coeficientes no reales es:

- A) 1 B) 3 C) 2
D) 5 E) 6

56. Determinar un número complejo cuyas cuatro raíces cuartas se encuentran sobre la circunferencia de radio $r = 2$; con centro en el origen, una de estas raíces tiene argumento igual a $\frac{7\pi}{12}$

- A) $8(\sqrt{3} + i)$ B) $4(1 + \sqrt{3})i$
C) $1 + \sqrt{3}i$
D) $8(1 + \sqrt{3}i)$ E) $8(1 - \sqrt{3}i)$

57. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que verifica:

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq \sqrt{2}; \operatorname{Im}(z) \leq \sqrt{2}$$

con mínima distancia a la recta:

$\operatorname{Im}(w) = 5; w \in \mathbb{C}$. Determinar z de mayor argumento.

- A) i B) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
C) $2i$
D) $1 - i$ E) $\sqrt{2} + i$

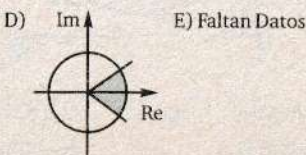
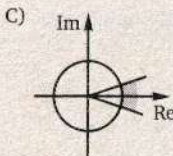
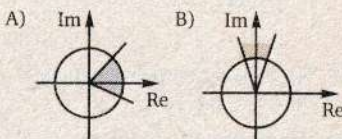
58. Simplificar:

$$\frac{1 + x \cos \theta + x^2 \cos 2\theta + x^3 \cos 3\theta + \dots}{x \sin \theta + x^2 \sin 2\theta + x^3 \sin 3\theta + \dots}$$

- A) $\csc \theta - \cot \theta$ B) $x \csc \theta - \cot \theta$
C) $x \sin \theta - \cot \theta$
D) $x^{-1} \csc \theta - \cot \theta$ E) $x^{-1} \csc \theta - \tan \theta$

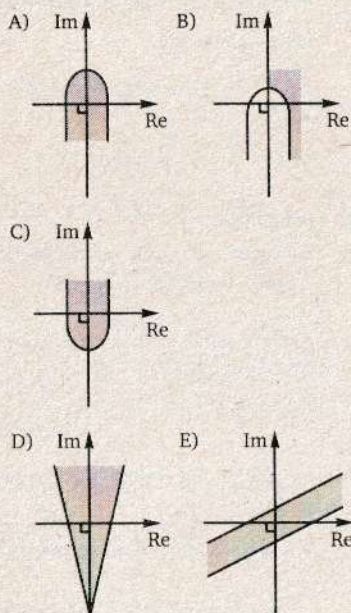
59. La gráfica que mejor representa al conjunto:

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z| \geq 1; -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4} \right\} \text{ es:}$$



60. La gráfica que mejor representa al conjunto:

$$A = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 2 + \operatorname{Im}(z)\} \text{ es:}$$

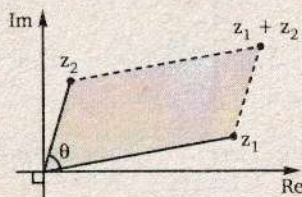


61. En el siguiente gráfico se cumple:

$$\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2); z_1 \cdot z_2 = 4i;$$

$$\arg(z_1) = 15^\circ$$

Determinar al área sombreada.

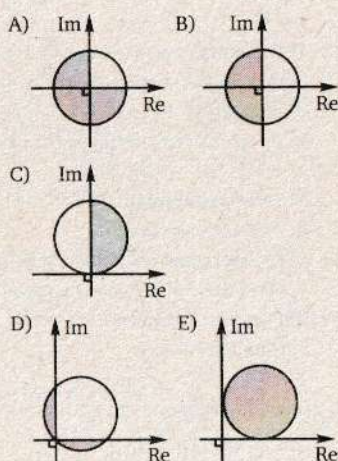


- A) $\sqrt{3} u^2$ B) $\sqrt{2} u^2$ C) $3\sqrt{2} u^2$
D) $2\sqrt{3} u^2$ E) $3\sqrt{3} u^2$

62. La gráfica que mejor representa al conjunto:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z - 1 - i| \leq \sqrt{2} \wedge \right.$$

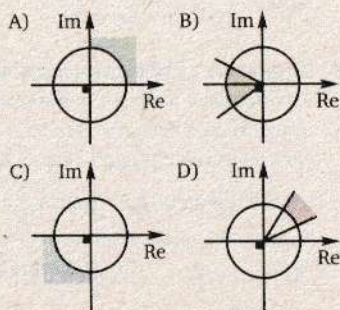
$$\left. \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi \right\} \text{ es:}$$



63. La gráfica que mejor representa al conjunto:

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} / z = \frac{w^3}{-i}; |w| \geq 1 \right.$$

$$\left. \frac{\pi}{6} \leq \arg(w) \leq \frac{\pi}{3} \right\} \text{ es:}$$



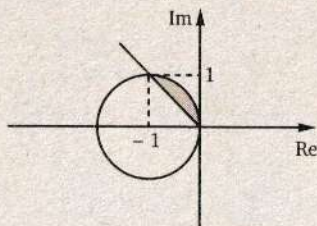
E) Ninguna de las anteriores.

64. Si el perímetro del polígono que tiene como vértices a los afijos de las raíces de orden n de 16 es un número irracional de la forma: $a\sqrt{b} - \sqrt{a}$

Calcular: $a + b$.

- A) 10 B) 12 C) 15
D) 18 E) 21

65. ¿A qué conjunto de números complejos corresponde la región sombreada?



- A) $\left\{ z = |z| e^{i\theta} / |z + i| \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$
 B) $\left\{ z = |z| e^{i\theta} / |z + i| \leq 1; \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$
 C) $\left\{ z = |z| e^{i\theta} / |z| \leq 1; \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$
 D) $\left\{ z = |z| e^{i\theta} / |z + 1| \leq 1; \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \right\}$
 E) $\left\{ z = |z| e^{i\theta} / |z - 1| \leq 1; \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$

66. Sean z y w dos números complejos que cumplen:

$$\begin{cases} z + i\bar{w} = 1 \\ 2\bar{z} + 3w = 4 \end{cases}$$

Determinar: $|z|^2$.

- A) $\frac{21}{13}$ B) $\frac{23}{13}$ C) $\frac{25}{13}$
D) $\frac{41}{13}$ E) $\frac{34}{13}$

67. Sea z un número complejo que cumple la condición: $|z| = m + 3(1 - iz \cdot \bar{z})$. Entonces el valor de m es:

- A) 3 B) 9 C) 27
D) 81 E) 243

68. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $\frac{(1+i)(1+2i)(1+3i)\dots(1+80i)}{(1-i)(2-i)(3-i)\dots(80-i)} \in \mathbb{R}$

II) Uno de los valores de $[i + i^{1/5}]^{1/2}$ es $i + 1$

III) $|e^{ie^{i\theta}}| = e^{-\sin\theta}, \forall \theta \in [0; 2\pi]$

IV) $|2z - i| \leq |z - i| + |z|, \forall z \in \mathbb{C}$

- A) FFVV B) FVVF C) VFFV
D) VVVV E) VVVF

69. Determinar el argumento del número complejo w , si $w = z^2 + z$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$.

donde: $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

- A) $\frac{\theta}{2}$ B) 2θ C) $\frac{3\theta}{2}$
D) $\frac{\theta}{4}$ E) $\frac{5\theta}{8}$

70. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones:

I) Si z y w son dos números complejos tales que $z^3 = w^3$, entonces $z = w$.

II) Existe una biyección entre $\mathbb{R}$ y el conjunto $\{(x; 0) / x \in \mathbb{R}\}$ (eje real).

III) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

- A) VVV B) FVF C) VFV
D) FVV E) VVF

71. Si
- $\cos \theta \neq 0$
- y

$$T = \left(\frac{1 + \sec \theta + i \tan \theta}{1 + \sec \theta - i \tan \theta} \right)^n;$$

entonces al simplificar T se define:

- A) $\text{cis } \theta$ B) $\text{cis } (n\theta)$ C) $n \text{ cis } \theta$
D) $\text{cis } (2n\theta)$ E) $2n \text{ cis } \theta$

72. Si
- $z \in \mathbb{C}$
- tal que
- $z^{30} + i = 0$

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I) La raíz principal es $\text{cis } (9^\circ)$.
II) Una raíz es $\text{cis } (129^\circ)$
III) En el tercer cuadrante existen 9 raíces.

- A) VVV B) VFV C) FVV
D) FVF E) VVF

73. Entre los números complejos
- z
- que satisfacen la condición:

$$4(z-3)(\bar{z}-3) = |z|^2 + 15.$$

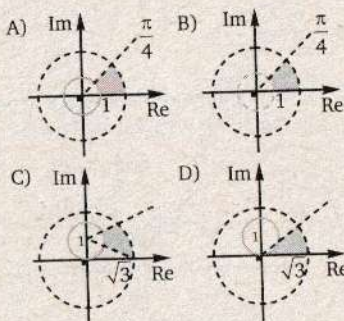
Determinar el complejo que tenga el mayor argumento principal e indicar su módulo, tal que z se encuentra en el primer cuadrante.

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{7}$ E) 7

74. Si el conjunto:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} / 1 < |z-i| < 2 \wedge 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4} \right\};$$

entonces la gráfica que mejor representa al conjunto A es:

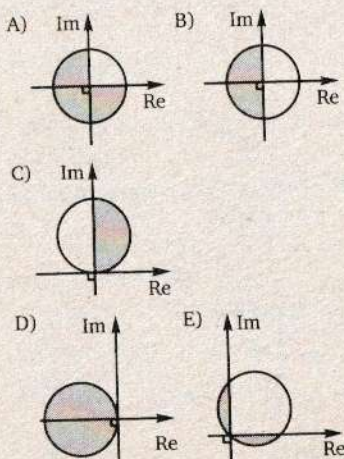


E) Ninguna de las anteriores.

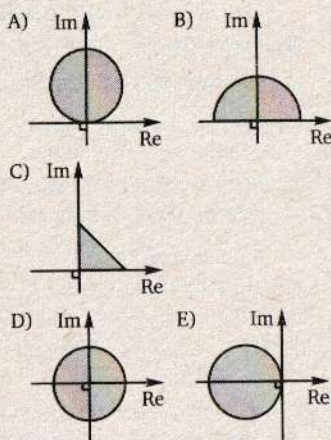
75. Si el conjunto:

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} / \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi \wedge |z-1-i| \leq \sqrt{2} \right\};$$

entonces la gráfica que mejor representa al conjunto B es:

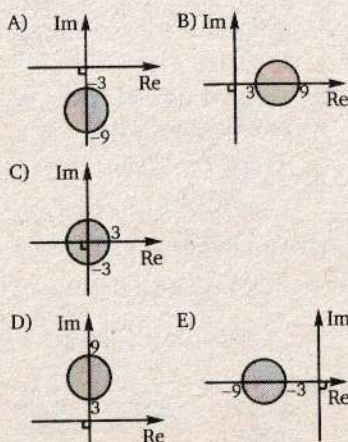


76. Si el conjunto: $A = \{\bar{z} + 1 / |z + 1| \leq 1; z \in \mathbb{C}\}$; entonces la gráfica que mejor representa al conjunto A es:



77. El conjunto A está definido por:

$A = \{z^0 - i / |z - 5i| \leq 3\}$; z^0 es el opuesto de z . Entonces la gráfica que mejor representa al conjunto A es:



78. Considere el polinomio complejo:

$$P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$$

tal que $a, b, c \in \mathbb{C}$. Las raíces de:

$$P(z) = 0; \text{ son } z_1 = 2 - i; z_2 = -3 + i;$$

$z_3 = -1 - 2i$; entonces $|b|$ es:

- A) 8 B) $\sqrt{63}$ C) $\sqrt{65}$
D) $\sqrt{41}$ E) 7

79. Si z es un número complejo definido

$$\text{por: } z = \frac{-3 + mi}{1 - i}$$

tal que $\text{Re}(z) = 2 \text{Im}(z)$; entonces indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) $m \in \{-3; -2; 1; 2\}$

II) $|z| = \sqrt{6}$

III) El $\bar{z} = 2 + i$

- A) VVF B) FFF C) VFV
D) FFV E) VFF

80. $S = (1+i) + (8+2i) + (27+3i) + \dots$

Si: $\frac{a}{b} = 78$; entonces el número de términos que deben considerarse para que: $S = a + bi$ es:

- A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

81. Si E es una raíz compleja de: $z^5 - 1 = 0$

y $S = 1 + E + E^4 + E^9 + E^{16}$; entonces $|S|$ es:

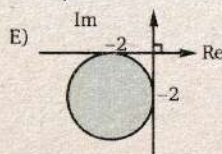
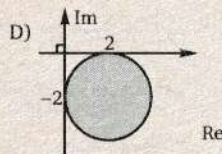
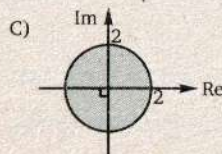
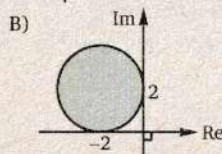
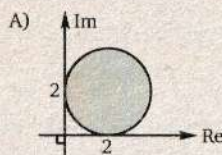
- A) 0 B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{10}$
D) 5 E) 10

82. Si A es un conjunto definido por:

$$A = \{\bar{z} + 2i \mid |z - 2| \leq 2\};$$

entonces la figura que mejor representa la gráfica del conjunto:

$$B = \{\bar{w} \mid w \in A\}; \text{ es:}$$



83. Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Si $\arg(z - \bar{z}) = \frac{3\pi}{2}$ y $\arg(z - \bar{z}) = \pi$;

entonces z está en el 3^{er} cuadrante.

II) Si $z_1 = (2; -1)$; $z_2 = (-2; 3)$;

entonces: $\bar{z}_1 z_2 = (-1; -8)$

III) Si z_1 está en el 2^{do} cuadrante y z_2

está en el 3^{er} cuadrante; entonces el complejo: $-(z_1 + \bar{z}_2)$ está en el

4^{to} cuadrante.

- A) VVV B) VFV C) FVV
D) FFV E) VVF

84. Si z es un complejo situado en el tercer cuadrante del plano de Gauss, entonces indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) $-\bar{z}$ está en el cuarto cuadrante.

II) $-zi$ está en el segundo cuadrante.

III) $z + z$ está sobre el eje real negativo.

- A) VFV B) VVF C) VVV
D) FVV E) FVF

85. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

p: Si z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$ tal que: $z_1 + z_2 = 3 + i$;

entonces: $\text{Im}(\bar{z}_1) + \text{Im}(\bar{z}_2) + \text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2) = 1$

q: $\forall z \in \mathbb{C}: \text{Im}(z+i) = \text{Im}(z+1) + 1$

r: $\forall z \in \mathbb{C}: \text{Re}(z+1) = \text{Re}(z+i) + 1$

- A) FVV B) FVF C) VVV
D) VVF E) VVF

86. Determinar el valor de la suma:

$$M = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1+2i}{2-i} + \frac{1+3i}{3-i} + \dots + \frac{1+20i}{20-i}$$

Siendo: $i = \sqrt{-1}$

- A) 16i B) 18i C) 20i
D) 22i E) 24i

87. Tres números complejos son las raíces cúbicas de un número complejo. Sus argumentos suman 510° y están entre: $0 \leq \theta < 2\pi$ ($i = 1; 2; 3$).

El mayor argumento de las raíces es:

- A) $\frac{29\pi}{18}$ B) $\frac{24\pi}{18}$ C) $\frac{14\pi}{18}$
D) $\frac{5\pi}{18}$ E) $\frac{4\pi}{18}$

88. Se tienen los siguientes números complejos:

$$z_1 = (2+m) + 3i; z_2 = 5 - (2-n)i$$

m y n valores reales. ¿Cuántos elementos tiene el siguiente conjunto:

$$\{(m, n) / z_1 = \bar{z}_2 \vee z_2 = \bar{z}_1\}$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 4 E) 6

89. Si: $[(1+i)^9 + (1-i)^9]^n = 1024$. Halle:

$$\frac{[(1+i)^9 - (1-i)^9]^n}{2^9}$$

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) -2
D) 4 E) 8

90. El número complejo:

$$z = \frac{\sin \theta + i^{113} \cos \theta}{\cos \theta + i^{113} \sin \theta} \text{ es igual a:}$$

- A) 1 B) $\sin 2\theta + i \cos 2\theta$
C) $\cos \theta - i \sin \theta$
D) $\cos 2\theta - i \sin 2\theta$ E) -1

91. Si: $\alpha; \beta; \theta$ son las raíces del polinomio complejo: $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$.
Entonces: $\alpha + \beta + \theta$ es igual a:

- A) -1 B) 0 C) 1
D) i E) -i

92. Hallar el número complejo:

$$z = \frac{(6+8i)^4(1+\sqrt{3}i)^{45}}{(4-3i)^4}$$

Sugerencia: $\tan(53^\circ) = \frac{4}{3}$

- A) $2^{15}(1+i)$ B) -2^{49} C) 2^{49}
D) $2^{45}(1-i)$ E) $2^{45}i$

93. Si: $z = 1 + i$, entonces de las raíces de $\sqrt[n]{z}$ se puede decir que:

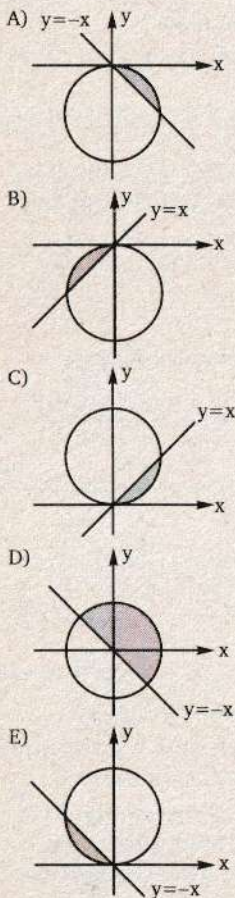
- I) En el primer cuadrante están ubicadas 2 de tales raíces.
II) En el segundo cuadrante están ubicadas 3 de tales raíces.
III) En el tercer cuadrante están ubicadas 2 de tales raíces.

Indique la verdad o falsedad de estas afirmaciones.

- A) FVV B) VFF C) FVF
D) FFV E) VVV

94. ¿Cuál de las gráficas corresponde a la región S?

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} / 1 \leq \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \right\}$$

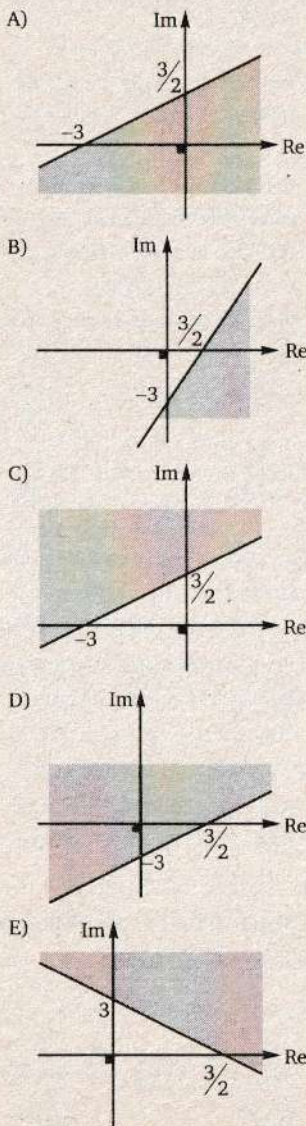


95. Calcular a + b, si:

$$2|3+5i|^2 - |2+5i|^2 + (1+5i)^2 = a + bi + 2i$$

- A) 17 B) 18 C) 19
D) 20 E) 21

96. Sea: $A = \{z - i / \operatorname{Im}(z) + 2 \operatorname{Re}(z) \leq 2\}$
¿Qué gráfica representa al conjunto A?



97. Si m es un entero no negativo; entonces el valor de:

$$z = \frac{(\sqrt{3} + i)^5}{(4 + 3i)(-1 + i)^4}$$

es:

A) $\frac{2}{25}$ B) $\frac{32}{15}$ C) $\frac{8}{5}$

D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

98. Si m es un entero no negativo; entonces el valor de:

$$E = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{4m+6}$$

A) i^m B) $(-1)^{m+1}$ C) $(-1)^m \cdot 2i$
D) $2i$ E) 1

99. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $|z| = |\bar{z}|; \forall z \in \mathbb{C}$

II) $|z - i| = |\bar{z} + i|; \forall z \in \mathbb{C}$

III) Existen al menos un valor real para

x tal que: $|e^{ix}| < 1$

A) VFF B) FVV C) VVF

D) VFF E) VVV

100. Si $z \in \mathbb{C} / |z| = 5$; calcular:

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2$$

A) 52 B) 50 C) 48

D) 2 E) 32



CLAVES

1	E	26	C	51	E	76	D
2	B	27	C	52	D	77	A
3	D	28	E	53	E	78	C
4	E	29	D	54	C	79	E
5	B	30	B	55	D	80	C
6	E	31	E	56	D	81	B
7	B	32	A	57	B	82	D
8	C	33	B	58	D	83	C
9	B	34	D	59	C	84	C
10	D	35	D	60	C	85	C
11	C	36	A	61	D	86	A
12	D	37	A	62	D	87	B
13	D	38	E	63	C	88	C
14	E	39	A	64	B	89	B
15	E	40	D	65	B	90	C
16	C	41	C	66	C	91	C
17	B	42	C	67	C	92	B
18	E	43	A	68	D	93	D
19	C	44	E	69	A	94	A
20	C	45	D	70	D	95	D
21	C	46	A	71	D	96	B
22	A	47	B	72	E	97	C
23	A	48	C	73	D	98	B
24	A	49	A	74	D	99	C
25	A	50	E	75	E	100	A

EXÁMENES DE ADMISIÓN UNIT

UNI - 2007 - I

PROBLEMA 01: Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $p(1) = -2$, $p(2) = 3$ y $p(5) = 34$. Determine un valor de x^* de modo que $p(x^*) = 0$

A) $\frac{3 - \sqrt{34}}{8}$

B) $\frac{-3 + \sqrt{217}}{8}$

C) $\frac{-3 + \sqrt{17}}{8}$

D) $\frac{\sqrt{217} + 3}{8}$

E) $\frac{\sqrt{217} + \sqrt{3}}{8}$

Resolución:Se tiene el polinomio: $p(x) = ax^2 + bx + c$... (1)Datos: $P(1) = -2$; $P(2) = 3$; $P(5) = 34$

Reemplazando datos en (1):

$$a(1)^2 + b(1) + c = -2$$

$$\Rightarrow a + b + c = -2 \quad \dots (2)$$

$$a(2)^2 + b(2) + c = 3 \quad \dots (3)$$

$$\Rightarrow 4a + 2b + c = 3$$

$$a(5)^2 + b(5) + c = 34$$

$$\Rightarrow 25a + 5b + c = 34 \quad \dots (4)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones conformado por (2), (3) y (4), se obtiene:

$$a = \frac{4}{3}; b = 1; c = -\frac{13}{3}$$

Luego el polinomio de (1) podrá expresarse:

$$p(x) = \frac{4}{3}x^2 + x - \frac{13}{3}$$

Para hallar un valor de x^* , de tal manera que:

$$p(x^*) = 0$$

En expresión (5): $p(x^*) = \frac{4}{3}(x^*)^2 + x^* - \frac{13}{3} = 0$

$$\Rightarrow x^* = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4\left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{13}{3}\right)}}{2\left(\frac{4}{3}\right)}$$

NÚMEROS COMPLEJOS

$$x^* = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8}$$

Uno de los valores es:

$$\therefore x^* = \frac{-3 + \sqrt{217}}{8}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 02: Halle el conjunto solución de la siguiente desigualdad: $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \geq \sqrt{|x|}$

A) $\left[-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right]$

B) $\left[-1; -\frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{5}; 1\right]$

C) $\left[-1; -\frac{4}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{5}; 1\right)$

D) $\langle -1; 1 \rangle$

E) $[-1; 1]$

Resolución:

Dada la siguiente desigualdad:

$$\underbrace{\sqrt{1-x}}_{(I)} + \underbrace{\sqrt{1+x}}_{(II)} \geq \underbrace{\sqrt{|x|}}_{(III)}$$

De (I):

$$1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

$$\Rightarrow CS_1 : x \in \langle -\infty; 1 \rangle \quad \dots(1)$$

De (II):

$$1+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$\Rightarrow CS_2 : x \in [-1; \infty) \quad \dots(2)$$

De (III):

$$x < 0 \vee x \geq 0$$

$$\Rightarrow CS_3 : x \in \langle -\infty; \infty \rangle \quad \dots(3)$$

Luego de (1), (2) y (3):

$$\therefore CS_1 \cap CS_2 \cap CS_3 = [-1; 1]$$

Rpta.: E

PROBLEMA 03: Determine la suma de las raíces de la ecuación: $16(z^2 - 2iz - 1)^2 = z^4$

A) $\frac{3-4i}{15}$

B) $\frac{2+4i}{5}$

C) $\frac{48i}{15}$

D) $\frac{-2+4i}{5}$

E) $\frac{64i}{15}$

Resolución:

Teorema de Cardano - Viette para un polinomio

$$a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + a_3 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\text{Suma de raíces} = -\frac{a_2}{a_1}$$

En la ecuación del enunciado:

$$16(z^2 - 2iz - 1)^2 = z^4$$

$$16(z^4 - 4iz^3 - 6z^2 + 4iz + 1) = z^4$$

$$15z^4 - 64iz - 96z^2 + 64iz + 16 = 0$$

Aplicando el teorema de Cardano:

$$\therefore \text{suma de raíces} = -\frac{(-64i)}{15} = \frac{64}{15}i$$

Rpta.: E**PROBLEMA 04:**En la figura adjunta se muestra las gráficas de las funciones f y g definidas por

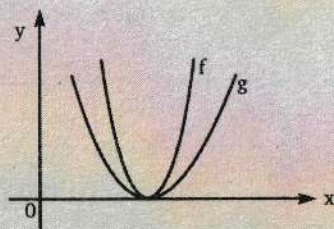
De las siguientes relaciones:

I) $n^2 = 4mp$

II) $\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$

III) $abc = mnp$

¿Cuáles son verdaderas?



A) Sólo I

B) Sólo II

C) Sólo III

D) I y II

E) II y III

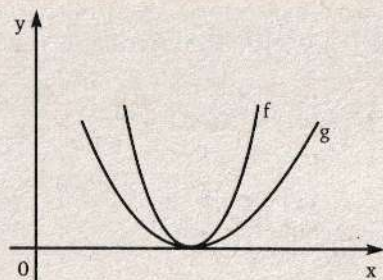
Resolución:

Se tiene las funciones:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$g(x) = mx^2 + nx + p$$

Sus gráficas:



Observe que A es un punto de tangencia con el eje x para $f(x)$ y $g(x)$, por lo tanto, ambas tendrán una sola raíz. Entonces para calcular sus raíces:

Para $f(x)$:
$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow b^2 = 4ac \quad \dots(1)$$

Para $g(x)$, similarmente:

$$n^2 - 4mp = 0$$

$$\Rightarrow n^2 = 4mp \quad \dots(2)$$

Además, como las ecuaciones

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \quad mx^2 + nx + p = 0$$

tienen las mismas raíces estas son equivalentes, entonces:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} \quad \dots(3)$$

De las siguientes relaciones:

I. $n^2 = 4mp$ (verdadera); por (2)

II. $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$ (verdadera); por (3)

III. $abc = mnp$; (falso). No es posible obtener esta expresión de las ecuaciones anteriores.

$\therefore$ Sólo son verdaderas I y II

Rpta.: D

PROBLEMA 05: Sean las sucesiones S y P donde:

$$S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = \frac{1}{2}, \dots, S_{2k-1} = \frac{1}{k}, S_{2k} = 0; k \geq 2$$

$$P_0 = 1, P_1 = 7, P_2 = 0, P_3 = \frac{1}{2}, \dots, P_{2k-1} = \frac{1}{k}, P_{2k} = 1; k \geq 2$$

Entonces los límites a los que converge las sucesiones S y P son respectivamente:

A) 0; 0

B) 0; 1

C) No existe; No existe

D) No existe; 1

E) 0; No existe

Resolución:

La sucesión S: $S_0 = 1; S_1 = 0; S_2 = 0; S_3 = \frac{1}{2}; \dots; S_{2k-1} = \frac{1}{k}; S_{2k} = 0; k \geq 2$

Para calcular a donde converge en el límite esta sucesión debemos tomar en cuenta que ésta presenta diferentes valores para los números pares e impares constituyendo dos sucesiones, veamos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (S_{2k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} \right) = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (S_{2k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (0) = 0$$

Como los límites de los dos subsucesiones convergen a "0", entonces podemos afirmar que éste es el límite al que converge la sucesión "S" **si existe**.

La sucesión P: $P_0 = 1; P_1 = 7; P_2 = 0; P_3 = \frac{1}{2}; \dots; P_{2k-1} = \frac{1}{k}; P_{2k} = 1; k \geq 2$

En el límite, considerando que debemos dividirla en forma similar a la sucesión anterior.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (P_{2k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} \right) = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (P_{2k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1) = 1$$

En el límite de los dos subsucesión convergen a dos números diferentes, se construye que el límite de P **no existe**.

Rpta.: E

PROBLEMA 06: Si $n=8k$ y $k \in \mathbb{Z}^+$, calcule el valor de R .

$$R = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^n + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^n$$

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Resolución: Si $n=8k$ y $k \in \mathbb{Z}^+$

$$R = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^n + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^n$$

$$R = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^{8k} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^{8k}$$

$$R = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{8k} (1+i)^{8k} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{8k} (-1+i)^{8k}$$

$$R = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{8k} (1+i)^{8k} + (-1+i)^{8k} \right]$$

$$R = \frac{1}{2^2} \left[((1+i)^2)^{4k} + ((-1+i)^2)^{4k} \right]$$

$$R = \frac{1}{2^{4k}} (1+2i-1)^{4k} + (1-2i-1)^{4k}$$

$$R = \frac{1}{2^{4k}} [(2i)^{4k} + (-2i)^{4k}]$$

$$R = \frac{1}{2^{4k}} [(2i)^{4k} + (2i)^{4k}]$$

$$R = \frac{1}{2^{4k}} [2(2i)^{4k}]$$

$$R = \frac{1}{2^{4k}} [2(2)^{4k}]$$

$$\therefore R = 2$$

Rpta.: C

PROBLEMA 07: Considere el problema:

maximizar $z = 30x_1 + 20x_2$

Sujeto a las restricciones

$x_1 \leq 60$

$x_2 \leq 75$

$10x_1 + 8x_2 \leq 800$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

Dadas las siguientes proposiciones referidas al problema.

- I. No existe región admisible
- II. El óptimo se da en el punto (60,0)
- III. Una solución factible es el punto (0,75)

Son correctas:

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) I y II

E) II y III

Resolución:

Para maximizar: $z = 30x_1 + 20x_2 \quad \dots(1)$

Con las siguientes restricciones:

$x_1 \leq 60$

$x_2 \leq 75$

$10x_1 + 8x_2 \leq 800$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

Estas restricciones podemos resumirlas en:

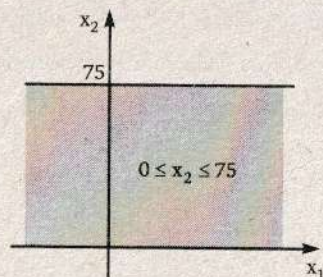
$0 \leq x_1 \leq 60$

$0 \leq x_2 \leq 75$

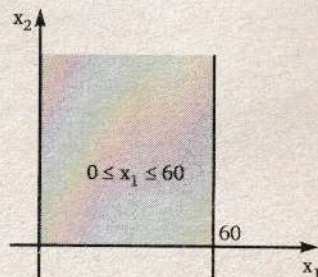
$5x_1 + 4x_2 \leq 400$

Graficando las relaciones:

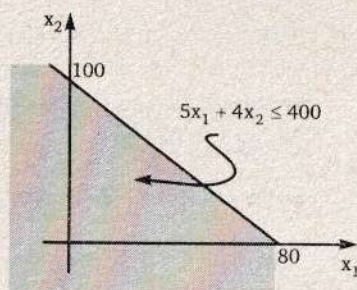
(I)



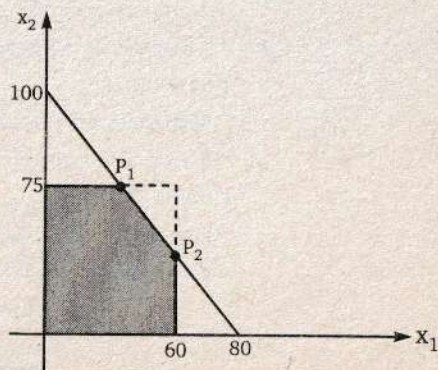
(II)



(III)



Intersectando las 3 gráficas:



Luego se puede afirmar que los valores que pueden asumir x_1 y x_2 se encuentran en la región sombreada. Los valores máximos de estas variables se ubicarán en el extremo superior derecho, es decir, en el segmento $P_1 P_2$. Para que z sea máximo, los valores que deben asumir los vértices, ya sea P_1 o P_2 que pertenece a la recta

$$5x_1 + 4x_2 = 400$$

En el punto $P_1 (x_2 = 75)$:

$$\text{De (1):} \quad 5x_1 + 4(75) = 400 \Rightarrow x_1 = 20 \Rightarrow P_1 = (20; 75)$$

En el punto $P_2 (x_1 = 60)$

$$\text{De (2):} \quad 5(60) + 4x_2 = 400 \Rightarrow x_2 = 25 \Rightarrow P_2 = (60; 25)$$

Reemplacemos ahora estos valores en la expresión (1) para verificar con cual de ellos " z " es máximo:

$$\text{Con } P_1: \quad z = 30(20) + 20(75) = 2100$$

$$\text{Con } P_2: \quad z = 30(60) + 20(25) = 2300; \text{ (máximo)}$$

En las proposiciones:

I. "No existe región admisible". INCORRECTA

-La región admisible está compuesta por la región sombreada que se muestra en el gráfico.

II. "El óptimo se da en el punto $(60; 0)$ ".

INCORRECTA

-La solución óptima (máxima) se da en el punto $(60, 25)$

III. "Una solución factible es el punto $(0; 75)$ ".

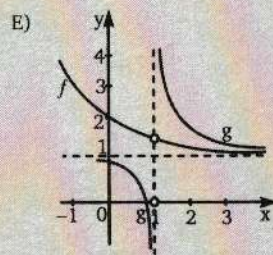
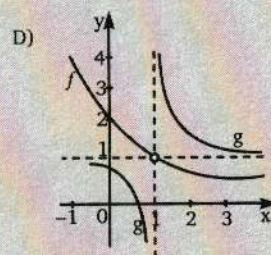
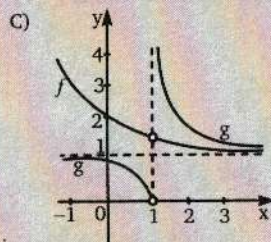
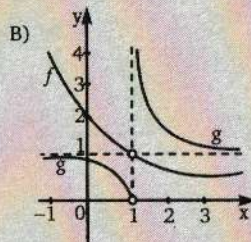
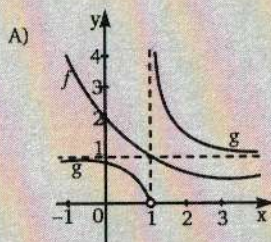
CORRECTA

-Observando el gráfico se deduce que el punto $(0; 75)$ pertenece a la región sombreada, por lo tanto éste es una solución factible.

$\therefore$ Son correctas II y III

Rpta.: C

PROBLEMA 08: Diga cuál de las siguientes gráficas representadas aproximadamente a las funciones $f, g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2^{-x+1}$ y $g(x) = 2^{1/(x-1)}$



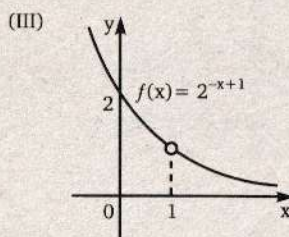
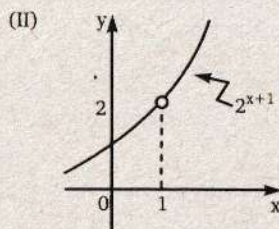
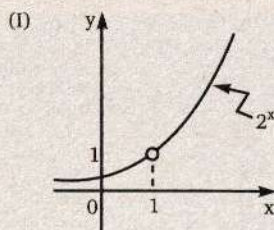
Resolución:

Las funciones f y g están definidos en :

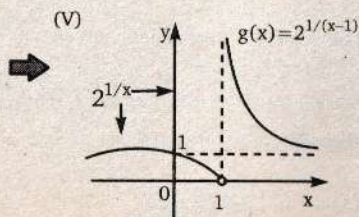
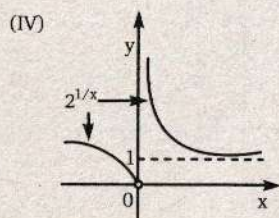
$$\mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

Graficando:

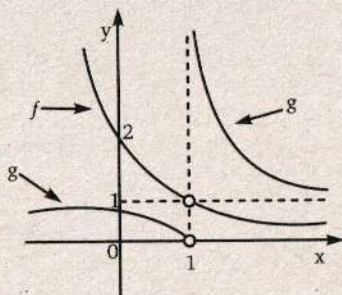
• $f(x) = 2^{-x+1}; x \in \mathbb{R} - \{1\}$



• $g(x) = 2^{1/(x-1)}$



Uniendo las gráficas (III) y (V):



Rpta.: B

UNI - 2007 - II

PROBLEMA 11:

Señale la alternativa que tiene la secuencia correcta, después de determinar la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

I) $a \in \langle 0; 1 \rangle \Leftrightarrow \frac{a}{1-a} \in \langle 0; +\infty \rangle$

II) $1 \leq x < 2 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{\frac{2-x}{2x}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

III) $-2 < x < -1 \Leftrightarrow 4 < 2 \left| \frac{x^2-1}{x^3} \right| < 8$

A) VVV

B) VVF

C) VFF

D) FFV

E) FFF

Resolución:

Analizando las propiedades :

I. Si $a \in \langle 0; 1 \rangle \Leftrightarrow \frac{a}{1-a} = \frac{1}{\frac{1}{a}-1} \in \langle 0; +\infty \rangle$

verdadero(V)

Verificación:

Formando la desigualdad

$$0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1$$

$$\frac{1}{a} - 1 > 0$$

$$\frac{\frac{1}{a} - 1}{a} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{a} - 1}{a} = \frac{1 - a}{a^2} \in (0; +\infty)$$

$$\text{II. } 1 \leq x < 2 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{\frac{2-x}{2x}} < \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \text{Falso (F)}$$

Verificación:

En la expresión radical:

$$\sqrt{\frac{2-x}{2x}} = \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}$$

Formando la desigualdad:

$$1 \leq x < 2$$

$$1 \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{2} > 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}} > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2-x}{2x}} \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{III. } -2 < x < -1 \Leftrightarrow 4 < 2^{\left| \frac{x^2-1}{x+1} \right|} < 8. \quad \text{Falso (F)}$$

Verificación:

Calculando el dominio:

$$4 < 2^{\left| \frac{x^2-1}{x+1} \right|} < 8$$

$$2^2 < 2^{\left| \frac{x-1}{x+1} \right|} < 2^3$$

$$2^2 < 2^{|x+1|} < 2^3$$

$$\Rightarrow 2 < |x-1| < 3$$

Para resolver esta inecuación con valor absoluto se presentan dos casos:

$$\text{Caso 1:} \quad x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

En la inecuación(*):

$$2 < x-1 < 3$$

$$3 < x < 4 \Rightarrow x \in \langle 3; 4 \rangle$$

$$\text{Caso 2:} \quad x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$$

En la inecuación(*):

$$-2x > x-1 > -3$$

$$-1 > x > -2 \Rightarrow x \in \langle -1; -2 \rangle$$

Considerando los dos casos:

$$x \in \langle -1; -2 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$$

Rpta.: C

PROBLEMA 12: Las raíces de la ecuación $x + \sqrt{x-2} = 4$ son :

- A) Solo $x = 6$ B) Solo $x = 3$ C) $x = 3$; $x = 6$
 D) $x = \sqrt{6}$; $x = 3$ E) No existe soluciones

Resolución: Dada la ecuación:

$$x + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 4 - x$$

$$x - 2 \geq 0 \wedge 4 - x \geq 0 \wedge x - 2 = 16 - 8x + x^2$$

$$2 \leq x \leq 4 \quad \wedge \quad x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$2 \leq x \leq 4 \quad \wedge \quad (x = 3 \vee x = 6)$$

De aquí se concluye que:

$$\therefore x = 3$$

Rpta.: B

PROBLEMA 13: En al relación al siguiente problema maximizar $Z = x_1 + 1,5x_2$ sujeto :

$$2x_1 + 2x_2 \leq 160 ; x_1 + 2x_2 \leq 120$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 280 ; x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

Indique al secuencia correcta después de determinar la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

- I. No existe región admisible
 II. El óptimo es el punto (60 ; 20)
 III. Una solución admisible es el punto (40 ; 40)

- A) VVV B) FFV C) VVF
 D) VVF E) VFF

Resolución:

Dada la función:

$$Z = x_1 + 1, 5x_2 \quad \dots(*)$$

Y las inecuaciones:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 160 \quad \dots(1)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 120 \quad \dots(2)$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 280 \quad \dots(3)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad \dots(4)$$

De la expresión (1):

$$x_1 + x_2 \leq 80 \Rightarrow L_1 : x_2 = -x_1 + 80 \quad \dots(5)$$

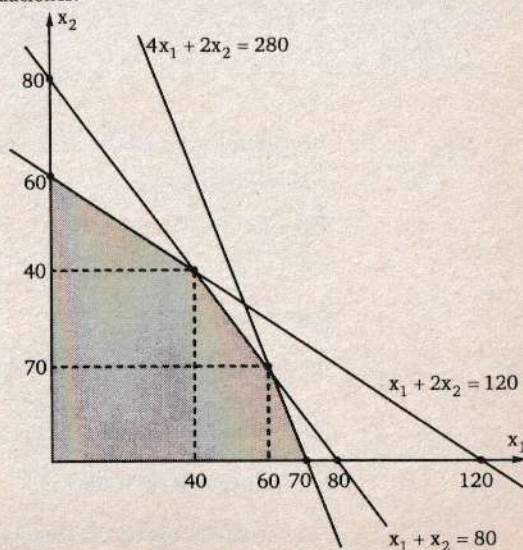
De la expresión (2):

$$x_1 + 2x_2 \leq 120 \Rightarrow L_2 : x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 60 \quad \dots(6)$$

De la expresión (3):

$$2x_1 + x_2 = 140 \Rightarrow L_3 : x_2 = -2x_1 + 140 \quad \dots(7)$$

Graficando las inecuaciones:



El área sombreada representa la intersección de las regiones que representa a las 5 inecuaciones a la cual se le conoce como la "región admisible".

El punto óptimo es aquel donde los valores de las coordenadas hacen que el valor de la función Z sea máximo. Este punto en un de las vértices del polígono, el que se encuentra a la derecha y/o en la parte superior.

Vamos a intersectar las rectas para hallar los puntos A y B :

Intersección de $L_1 \cap L_2$, de (1) y (2) :

$$-x_1 + 80 = -\frac{1}{2}x_1 + 120$$

$$\Rightarrow x_1 = 40$$

En (1) :

$$x_2 = -(40) + 80 = 40$$

$$\Rightarrow A = (x_A ; x_n) = (40 ; 40)$$

Intersección de $L_1 \cap L_3$ de (1) y (3) :

$$-x_1 + 80 = -2x_1 + 140$$

$$\Rightarrow x_1 = 60$$

En (1) :

$$x_2 = -(60) + 80 = 20$$

$$\Rightarrow B = (x_B ; y_B) = (60 ; 20)$$

Reemplazando las coordenadas de A y B en (*) para verificar cual es el punto que maximiza a Z :

Para $A = (40 ; 40)$

$$Z = (40) + 1,5 (40) = 100$$

Para $B = (60 ; 20)$

$$Z = (60) + 1,5 (20) = 90$$

Luego en las proposiciones del enunciado:

I. "No existe región admisible"

falso (F)

La región admisible esta dada por la región sombreada del gráfico.

II. "El óptimo es el punto (60 ; 20)". falso (F)

El punto es $A = (40 ; 40)$ porque es el que maximiza a Z.

III. "Una solución admisible es el punto $A = (40 ; 40)$ ". falso (V)

El punto $A = (40; 40)$ es justamente el punto óptimo y pertenece a la región

Rpta.: B

PROBLEMA 14: Halle la intersección de los conjuntos

$$P = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x + a \geq 0\} \text{ y } Q = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - ax - 2a^2 \leq 0\}$$

siendo: $\frac{3}{4} \leq a < 1$

A) $\emptyset$

B) $[-a; 1 - \sqrt{1-a}]$

C) $(-\infty; 1 - \sqrt{1-a}]$

D) $[1 + \sqrt{1-a}; \infty)$

E) $[-a; 1 - \sqrt{1-a}) \cup [1 + \sqrt{1-a}; 2a]$

Resolución:

Se tiene los conjuntos definidos como:

$$P = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x + a \geq 0\}$$

$$\text{y } Q = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - ax - 2a^2 \leq 0\}$$

Donde: $3/4 \leq a < 1$

Operando en el conjunto P:

$$x^2 - 2x + a \geq 0$$

$$(x-1)^2 - (1-a) \geq 0$$

$$((x-1) - \sqrt{1-a})((x-1) + \sqrt{1-a}) \geq 0$$

$$[x - (1 + \sqrt{1-a})][x - (1 - \sqrt{1-a})] \geq 0$$

Analizando la condición (1) para verificar la posición de estos "puntos de corte"

$$\frac{3}{4} \leq a < 1 \Rightarrow 0 < 1-a$$

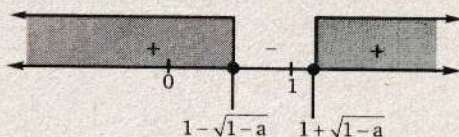
$$0 < 1-a < 1$$

$$0 < \sqrt{1-a} < 1$$

$$0 < 1 - \sqrt{1-a} < 1 + \sqrt{1-a}$$

Entonces podemos afirmar que:

$$P = (-\infty; 1 - \sqrt{1-a}] \cup [1 + \sqrt{1-a}; +\infty)$$



Operando en el conjunto Q:

$$x^2 - ax - 2a^2 \leq 0$$

$$(x - 2a)(x - a) \leq 0$$

Por teoría de puntos de corte se deduce que:

$$Q = [-a; 2a]$$

Analizando nuevamente la restricción (1):

$$\frac{3}{4} \leq a < 1$$

$$\Rightarrow -1 < -a \leq -\frac{3}{4}$$

$$-1 + 1 < 1 - a \leq -\frac{3}{4} + 1$$

$$0 < 1 - a \leq \frac{1}{4}$$

$$0 < \sqrt{1-a} \leq \frac{1}{2}$$

$$1 < 1 + \sqrt{1-a} \leq \frac{3}{2} \quad \dots(2)$$

De la condición (1) también se tiene:

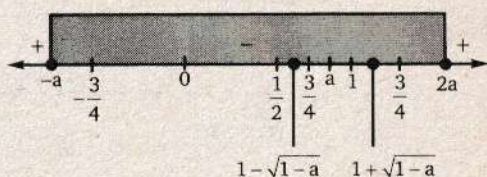
$$\frac{3}{4} < a \Rightarrow \frac{3}{2} < 2a \quad \dots(3)$$

$$\Rightarrow -a < -\frac{3}{4} \quad \dots(4)$$

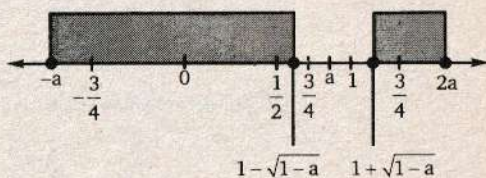
Considerando la expresión (3) en (2):

$$1 + \sqrt{1-a} \leq \frac{3}{2} < 2a \quad \dots(5)$$

Considerando (4) y (5) podemos graficar:



Finalmente $P \cap Q$:



$$\Rightarrow P \cap Q = [-a; 1 - \sqrt{1-a}] \cup [1 + \sqrt{1-a}; 2a]$$

Rpta.: E

PROBLEMA 15: Si $x \in (0; 7)$, entonces encuentre la suma de los extremos del intervalo al que pertenece:

$$y = \frac{5-x}{x+3}$$

A) $\frac{22}{15}$

B) $\frac{28}{15}$

C) $\frac{8}{3}$

D) $\frac{1}{6}$

E) $-\frac{1}{6}$

Resolución:

Se tiene:

$$y = \frac{5-x}{x+3}$$

Acomodando la expresión:

$$y = \frac{8-(x+3)}{x+3} = \frac{8}{x+3} - 1$$

Del dato:

$$0 < x < 7$$

(+3):

$$3 < x+3 < 10$$

invirtiendo:

$$\frac{1}{10} < \frac{1}{x+3} < \frac{1}{3}$$

(×8):

$$\frac{8}{10} < \frac{8}{x+3} < \frac{8}{3}$$

(-1):

$$\frac{4}{5} - 1 < \frac{8}{x+3} - 1 < \frac{8}{3} - 1$$

$$-\frac{1}{5} < \underbrace{\frac{8}{x+3} - 1}_y < \frac{5}{3}$$

Los valores extremos serán:

$$-\frac{1}{5} \text{ y } \frac{5}{3}$$

Piden la suma de los valores extremos:

$$\frac{5}{3} + \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{22}{15}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 16: Si $x \in (0;7)$, Si $x - x^{-1} = 1$, ($x \neq 0$), entonces los valores de $x^2 + x^{-2}$ y $x^3 - x^{-3}$ son:

A) 2 y 3

B) 2 y $\frac{1}{2}$

C) 3 y $\frac{1}{3}$

D) 3 y 4

E) 4 y $\frac{1}{4}$

Resolución:

Por dato:

$$x - \frac{1}{x} = 1 \quad \dots(I)$$

Elevando al cuadrado(I):

$$x^2 - 2(x) + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1^2$$

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 1 + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + x^{-2} = 3$$

Elevando al cubo (I):

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = 1^3$$

$$x^3 - 3x^2\left(\frac{1}{x}\right) + 3x\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^3 = 1$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} - 3 \underbrace{\left(x - \frac{1}{x}\right)}_1 = 1$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = 1 + 3$$

$$\Rightarrow x^3 - x^{-3} = 4$$

$$\therefore x^2 + x^{-2} = 3 \wedge x^3 - x^{-3} = 4$$

Rpta.: D

PROBLEMA 17: ¿Qué condición deben cumplir los números reales b y c para que el polinomio $x^2 + bx + c$ sea divisible por $x - 1$?

A) $b - c = 1$

B) $b + c = -1$

C) $b + c = 1$

D) $c - b = 2$

E) $b - c = -1$

Resolución:

Tenemos:

$$D(x) = x^2 + bx + c$$

$$d(x) = x - 1$$

$q(x)$ = cociente

$r(x)$ = residuo

Por la identidad de la división:

$$D(x) = q(x)d(x) + r(x)$$

$$x^2 + bx + c = q(x)(x - 1) + r(x)$$

Por dato $D(x)$ es divisible por $d(x)$, entonces $r(x) = 0$

$$x^2 + bx + c = q(x)(x - 1) + \underbrace{r(x)}_0$$

$$x^2 + bx + c = q(x)(x - 1)$$

Evaluando para : $x = 1$

$$(1)^2 + b(1) + c = q(1)\underbrace{(1 - 1)}_0$$

$$1 + b + c = 0$$

$$\therefore b + c = -1$$

Rpta.: B

PROBLEMA 18: Si $2^{64} = a^a$ y $\sqrt{3}^{54} = (3b)^b$, halle $3a + 2b$.

A) 48

B) 96

C) 99

D) 44

E) 66

Resolución: Por dato:

$$2^{64} = a^a \quad \wedge \quad \sqrt{3}^{54} = (3b)^b$$

$$2^4 \cdot 16 = a^a \quad \wedge \quad 3^{\frac{54}{2}} = (3b)^b$$

$$(2^4)^{16} = a^a \quad \wedge \quad (3 \cdot 3^2)^9 = (3b)^b$$

$$(16)^{16} = a^a \quad \wedge \quad (3 \cdot 9)^9 = (3b)^b$$

$$(3 \cdot 9)^9 = (3b)^b$$

Por comparación: $a = 16 \quad \wedge \quad b = 9$

Piden: $3a + 2b = 3(16) + 2(9) = 66$

$$\therefore 3a + 2b = 66$$

Rpta.: E

PROBLEMA 19: Si el conjunto solución de $|2x - a| < a^2$ es $\langle -3; 6 \rangle$, halle a .

A) 3

B) -2

C) -4

D) 1

E) -3

Resolución: Consideremos la siguiente propiedad:

Si: $|f(x)| < b; b > 0 \Rightarrow -b < f(x) < b$

Tenemos: $|2x - a| < a^2$; como $a^2 > 0$, entonces:

$$-a^2 < 2x - a < a^2$$

$$-a^2 + a < 2x < a^2 + a$$

$$\frac{-a^2 + a}{2} < x < \frac{a^2 + a}{2}$$

$$\Rightarrow \text{C.S.} = \left(\frac{-a^2 + a}{2}; \frac{a^2 + a}{2} \right) \dots \text{(I)}$$

Por dato : $\text{C.S.} = \langle -3; 6 \rangle \dots \text{(II)}$

De (I) y (II):

$$\frac{-a^2 + a}{2} = -3 \wedge \frac{a^2 + a}{2} = 6$$

$$(a - 3)(a + 2) = 0 \wedge (a + 4)(a - 3) = 0$$

$$a = 3 \vee a = -2 \quad a = -4 \vee a = 3$$

Se deben cumplir ambas condiciones:

$$\therefore a = 3$$

Rpta.: A

PROBLEMA 20: Uno de los términos en el desarrollo del binomio $(x\sqrt[3]{y} - y\sqrt{x})^{12}$ es mx^9y^8 . Determine el valor de m.

A) $\binom{12}{6}$

B) $\binom{12}{8}$

C) $\binom{12}{9}$

D) $\binom{12}{7}$

E) $\binom{12}{10}$

Resolución:

El término general de $(a + b)^n$ está dado por la expresión:

$$r_{k+1} = C_k^n a^{n-k} \cdot b^k$$

También se puede expresar como:

$$t_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Para : $n = 12$; $a = x \sqrt[3]{y}$; $b = -y\sqrt{x}$; tenemos :

$$t_{k+1} = \binom{12}{k} (x\sqrt[3]{y})^{12-k} \cdot (-y\sqrt{x})^k$$

$$t_{k+1} = (-1)^k \binom{12}{k} x^{12-\frac{k}{2}} y^4 + \frac{2k}{3}$$

Por dato uno de los terminos es: mx^9y^8

$$\Rightarrow 12 - \frac{k}{2} = 9 \wedge 4 + \frac{2k}{3} = 8$$

Resolviendo : $k = 6$

Luego :

$$(-1)^k \binom{12}{k} = m$$

$$(-1)^6 \binom{12}{6} = m$$

$$\therefore m = \binom{12}{6}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 21: Halle el valor de la expresión

$$\sqrt{5^2 + 5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots}$$

A) $\frac{5}{2}$

B) $\frac{5}{2}\sqrt{5}$

C) $\frac{25}{4}$

D) 5

E) $\frac{21}{4}$

Resolución:

Consideremos la siguiente propiedad:

$$\sqrt{5^2 + 5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots}$$

serie infinita $\left(r = \frac{1}{5}\right)$

$$\sqrt{25 + 5 + \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}} = \sqrt{30 + \frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$$

Rpta.: B**PROBLEMA 22:** Sabiendo que $f(x+6) = ax+b$, $f(2) = -14$ y $f(-3) = -29$, halle el valor de $2a-b$.

A) -6

B) 10

C) 4

D) 12

E) 8

Resolución:

Dato:

$$f(x+6) = ax + b$$

Sabemos:

$$f(2) = -14 \Rightarrow a(-4) + b = -14 \quad \dots(\alpha)$$

$$f(-3) = -29 \Rightarrow a(-9) + b = -29 \quad \dots(\beta)$$

$$(\alpha) - (\beta): 5a = 15 \Rightarrow a = 3 \wedge b = -2$$

Nos piden :

$$2a - b = 2(3) - (-2) = 8$$

Rpta.: E**PROBLEMA 23:** Determine el valor de n , sabiendo que el desarrollo de $(x+a)^{2n+25}$ tiene 524 términos.

A) 295

B) 305

C) 209

D) 269

E) 259

Resolución:

$(x + a)^{2n+5}$ tiene 524 términos

Por teoría:

Número de términos:

$$(2n + 5) + 1 = 524$$

$$\Rightarrow n = 259$$

Rpta.: E

PROBLEMA 24:

Si $a(b+c) = -bc$ y $a+b+c=2$, entonces el valor de $a^2+b^2+c^2$ es:

A) 2

B) $2\sqrt{2}$

C) 3

D) 4

E) $4\sqrt{2}$

Resolución:

Datos:

$$a(b+c) = -bc \quad \dots(\alpha)$$

$$a+b+c = 2 \quad \dots(\beta)$$

Nos piden :

$$a^2 + b^2 + c^2$$

de (β) :

$$(a+b+c)^2 = 2^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) = 4$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2[a(b+c) + bc] = 4$$

De (α) :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(-bc + bc) = 4$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 4$$

Rpta.: D

PROBLEMA 25: Sabiendo que:

$$a + b + c = 0 ; ab + ac + bc = -7 \text{ y } abc = -6, \text{ calcule } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

A) $\frac{18}{36}$

B) $\frac{49}{36}$

C) $\frac{29}{36}$

D) $\frac{7}{36}$

E) $\frac{7}{6}$

Resolución:

Datos: $a + b + c = 0 \quad \dots(\alpha)$

$ab + ac + bc = -7 \quad \dots(\beta)$

$abc = -6 \quad \dots(\theta)$

Nos piden: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

$(\beta) \div (\theta): \quad \frac{ab + ac + bc}{abc} = \frac{-7}{-6}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{6}$$

Elevando al cuadrado:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \left(\frac{7}{6}\right)^2$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right) = \frac{49}{36}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{a+b+c}{abc}\right) = \frac{49}{36}$$

De (α) :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{0}{abc}\right) = \frac{49}{36}$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{49}{36}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 26: Halle el producto de los valores de x que satisfacen la ecuación

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0$$

A) 12

B) 6

C) 30

D) 5

E) 32

Resolución:

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0$$

$$\log_2 x \quad \begin{matrix} \diagup -3 \\ \diagdown -2 \end{matrix}$$

$$\log_2 x \quad \begin{matrix} \diagdown -3 \\ \diagup -2 \end{matrix}$$

$$\log x = 3 \vee \log_2 x = 2$$

$$x^2 = 2^3 \vee x^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow x_1 = 8 \vee x_2 = 4$$

$$\therefore x_1 x_2 = 32$$

Rpta.: E

PROBLEMA 27: Halle el conjunto de valores reales de m para los cuales el sistema

$$\begin{cases} mx - 2y = 5 \\ -3x + (m-1)y = 1 \end{cases}$$

tiene solución única

A) $\mathbb{R}$

B) $\{-2; 3\}$

C) $\{3\}$

D) $\mathbb{R} - \{-2; 3\}$

E) $\{-2\}$

Resolución:

$$\begin{cases} mx - 2y = 5 \\ -3x + (m-1)y = 1 \end{cases}$$

Por teoría:

$$\frac{m}{-3} \neq \frac{-2}{m-1} \Rightarrow \begin{matrix} m^2 - m - 6 \neq 0 \\ (m-3)(m+2) \neq 0 \end{matrix}$$

$$\therefore CS = \mathbb{R} - \{-2; 3\}$$

Rpta.: D

PROBLEMA 28: Para que en la ecuación $px^2 + 10x - 2 = 0$ una de las raíces sea $1/8$, el valor de P debe ser:

A) 64

B) 36

C) 69

D) $-\frac{1}{3}$

E) 48

Resolución:

$$px^2 + 10x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow p\left(\frac{1}{8}\right)^2 + 10\left(\frac{1}{8}\right) - 2 = 0$$

$$\frac{p}{64} + \frac{5}{4} - 2 = 0$$

$$\therefore p = 48$$

Rpta.: E

PROBLEMA 29: Un padre de familia ha puesto a su hijo 8 problemas, ofreciéndole un dólar por resolver correctamente el primer problema, 2 dólares por el segundo, 4 dólares por el tercero, y así sucesivamente. Si su hijo resuelve todos los problemas correctamente, ¿Cuántos dólares recibirá?

A) 132 dólares

B) 200 dólares

C) 250 dólares

D) 248 dólares

E) 255 dólares

Resolución:

1.^{er} problema = \$12.^{er} problema = \$23.^{er} problema = \$44.^{er} problema = \$85.^{er} problema = \$16

6.^{er} problema = \$32

7.^{er} problema = \$64

8.^{er} problema = \$128

Serie geométrica de razón igual 2:

Por fórmula :
$$S = t_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

Donde :
$$t_1 = 1 ; q = 2 ; n = 8$$

$$S = 1 \left(\frac{2^8 - 1}{2 - 1} \right) \Rightarrow S = 255$$

$\therefore$ recibió 255 dólares

Rpta.: E

- 1 Ecuaciones Exponenciales - Ecuaciones Exponenciales
- 2 El polinomio - Productos Notables
- 3 División Algebraica - Divisibilidad Algebraica
- 4 Factorización - Fracciones
- 5 Radicación - Racionalización
- 6 Potencia de un Binomio - Factorial de un Número - Combinatoria
- 7 Números Complejos
- 8 Ecuaciones
- 9 Desigualdades - Inecuaciones
- 10 Relaciones - Funciones
- 11 Función Exponencial - Logaritmación
- 12 Sucesiones - Series
- 13 Matrices - Determinantes
- 14 Sistema de Ecuaciones
- 15 Programación Lineal - Gráficas de Relaciones



N°

TEMA

1

Leves de Exponentes - Ecuaciones Exponenciales